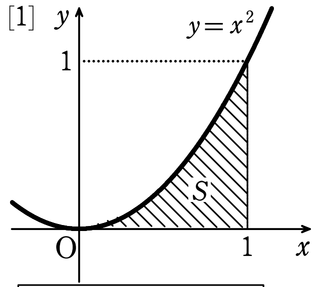
積分法とその応用【定積分と区分求積法】　p.163～165

□定積分と区分求積法

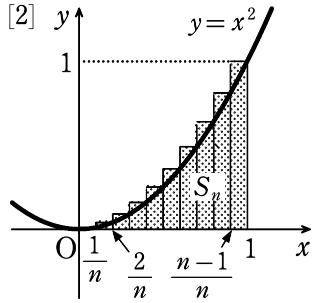
関数 $f(x)=x^2$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を考えてみよう。



定積分を用いて S を求めると　$S=\int_0^1 x^2dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

一方，図 [2] のように区間 [0，1] を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする。$n\longrightarrow\infty$ のとき，この<u>長方形の集まりは図 [1] の斜線で示した図形に限りなく近づくから，</u>$S_n\longrightarrow S$ と予想される。 実際に計算してみよう。

幅が $\dfrac{1}{n}$，高さが $f(x)$



$$S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

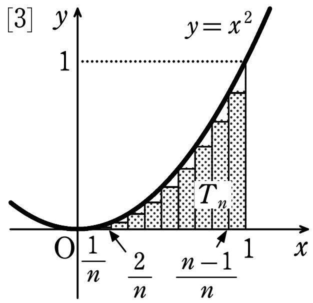
であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=S$ が成り立つことが計算で確かめられた。

確認してみよう

定積分と和の極限

上の S_n の代わりに，右の図 [3] の長方形の面積の和 T_n を考えても，



$$T_n=\frac{1}{n}\left\{0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ \cdots\cdots\ +\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}=S$

このように，区間を細分し，和の極限値として面積や体積を求める方法を一般に **区分求積法** という。

一般に、図形の面積や体積を 次のように求める計算法

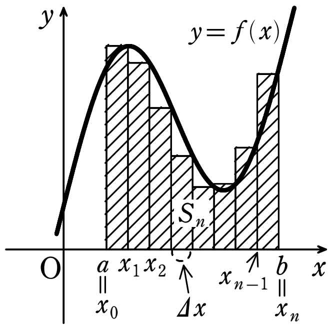
[1] 微少な基本的図形の集まりを作り，与えられた図形を近似する

[2] その基本的図形の集まりの面積や体積を求め，その極限値を計算する。

積分法とその応用【定積分と区分求積法】 p.163～165

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ のとき，区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を，a に近い方から順に　$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}$　とし，次のようにおく。

$$a = x_0,\ b = x_n,\ \frac{b-a}{n} = \varDelta x$$



このとき，右の図の斜線部分の面積　S_n は

$$S_n = f(x_1)\varDelta x + f(x_2)\varDelta x + f(x_3)\varDelta x + \cdots\cdots + f(x_n)\varDelta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

であり，$n \longrightarrow \infty$ のとき $S_n \longrightarrow S$ と考えられる。

一般に，常に $f(x) \geqq 0$ と仮定しなくても，次のことが成り立つ。

区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

ただし，$\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a + k\varDelta x$

$\varDelta x = \dfrac{1}{n}$，$x_k = \dfrac{k}{n}$

とくに $a=0$，$b=1$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

応用例題６） 次の極限値を求めよ。　$S = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+n}\right)$

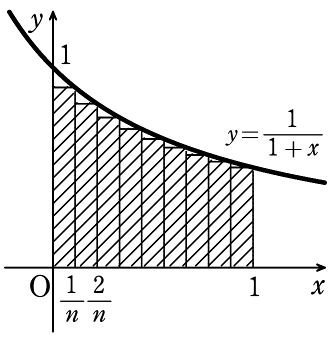
方針　$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形を作るために，①　$\dfrac{1}{n}$ をくくり出す。

第 k 項が $\dfrac{1}{n}\cdot\boxed{}$ の形に変形できれば…

②　$x = \dfrac{k}{n}$ となるところを探す。（ $k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$）

解答

$$S = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{1+\boxed{\frac{2}{n}}} + \frac{1}{1+\boxed{\frac{3}{n}}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\boxed{\frac{n}{n}}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\boxed{\frac{k}{n}}}\right)$$



ここで，$f(x) = \dfrac{1}{1+\boxed{x}}$ とすると

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\log|1+x|\Big]_0^1$$
$$= \log 2 - \log 1 \ = \log 2$$