積分法とその応用【定積分のいろいろな問題】　p.161～162

□定積分と導関数

a を定数とするとき，$F'(t)=f(t)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

$F(x)$ は x の関数
$F(x)$ は定数扱い

$F(a)$ は定数扱いなので
微分すると 0 になる

この両辺の関数を x で微分すると，次の公式が得られる。

x の関数 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の
導関数は $f(x)$

定積分と導関数

a が定数のとき　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

$$\frac{d}{d\square}\int_a^{\square} f(\triangle)\,d\triangle=f(\square)$$

練習２５改）　次の関数を x で微分せよ。ただし，a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_a^x \sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t}\,dt$

$\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ だと
$\Big[F(t)\Big]_x^1=F(1)-F(x)$
となるので、あらかじめ
上下を変えて符号を変えておく

解答

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \sin t\,dt=\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t}\,dt=-\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{t^3}{1+e^t}\,dt=-\frac{x^3}{1+e^x}$$

応用例題３改）　関数 $G(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ の $G''(x)$ を求めよ。

ヒント　右辺の積分の計算では，積分変数でない x は定数として扱う。

x は定数扱い

解答　$G(x)=\displaystyle\int_0^x x\cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$

$=x\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t\cos t\,dt$　であるから

積の微分法
微分そのまま、そのまま微分

$G'(x)=(x)'\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt\right)-\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt$

$=\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt+x\cos x-x\cos x$

$=\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$

【何を求めるのかをよく考えよう】
$G'(x)=\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^x$
$=\sin x-\sin 0=\sin x$
x で微分すると
$G''(x)=\cos x$
この流れは $G'(x)$ が聞かれていないのなら
積分→微分と無駄が多いこととなる

よって　$G'(x)=\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ であるから，

両辺を x で微分すると

$$G''(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt=\cos x$$

積分法とその応用【定積分のいろいろな問題】　p.161～162

応用例題４） 関数 $\displaystyle\int_x^{2x}\sin t\,dt$ を x で微分せよ。

解答　$F'(t)=\sin t$　とすると　$\displaystyle\int_x^{2x}\sin t\,dt=\Big[F(t)\Big]_x^{2x}=F(2x)-F(x)$

よって　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{2x}\sin t\,dt=\frac{d}{dx}\{F(2x)-F(x)\}=F'(2x)\cdot(2x)'-F'(x)=2\sin 2x-\sin x$

上端下端とも数値であるので
計算結果は定数となる

応用例題５） 等式 $f(x)=x+\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt}$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答

$$\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt=a \quad \cdots\cdots ①$$

数Ⅱのときと同様
定数となる部分を文字で置き換える

とおくと，与えられた等式から

$$f(x)=x+a \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

②において $x=t$ とすると

$$f(t)=t+a$$

①に当てはめて積分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}f(t)\sin t\,dt&=\int_0^{\pi}(t+a)\sin t\,dt\\
&=\int_0^{\pi}t\sin t\,dt+\int_0^{\pi}a\sin t\,dt\\
&=\boxed{\int_0^{\pi}t\sin t\,dt}+\int_0^{\pi}a\sin t\,dt\\
&=\Big[-t\cos t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos t)dt+a\int_0^{\pi}\sin t\,dt\\
&=-\pi\cos\pi+0+\Big[\sin t\Big]_0^{\pi}+a\Big[(-\cos t)\Big]_0^{\pi}\\
&=\pi+(\sin\pi-\sin 0)-a(\cos\pi-\cos 0)\\
&=\pi+0-0-a(-1-1)\\
&=\pi+2a
\end{aligned}$$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-\cos t$
	t	$\sin t$
微分	1	$\cos t$

ゆえに，①より　$\pi+2a=a$ から　$a=-\pi$

これを ② に代入して　$f(x)=x-\pi$