# 積分法とその応用【定積分の部分積分法】 p.158

## □定積分の部分積分法

不定積分の部分積分法の公式から，次の公式が得られる。

**定積分の部分積分法**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

基本は不定積分同様表の活用

| | | |
|---|---|---|
| 積分 | | |
| | ○ | △ |
| 微分 | | |

前半は $\Big[\quad\Big]_{下}^{上}$　後半は $\int_{下}^{上}$

**練習２２）**　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

解答

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

| | | |
|---|---|---|
| 積分 | $\frac{1}{2}x^2$ | $-\cos x$ |
| | $x$ | $\sin x$ |
| 微分 | $1$ | $\cos x$ |

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot(-\cos x)\,dx$$
$$=-\pi\cos\pi+0+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi+\sin\pi-\sin 0$$
$$=\pi$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

| | | |
|---|---|---|
| 積分 | $\frac{1}{2}x^2$ | $e^x$ |
| | $x$ | $e^x$ |
| 微分 | $1$ | $e^x$ |

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\,dx$$
$$=e-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e^1-e^0)$$
$$=1$$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

| | | |
|---|---|---|
| 積分 | $\frac{1}{2}x^2$ | ? |
| | $x$ | $\log x$ |
| 微分 | $1$ | $\frac{1}{x}$ |

$$=2\log 2-\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=2\log 2-\frac{3}{4}$$

**研究）** 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$

部分積分を続けて行う解法

定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$ は，次のように求められる。

$$I=\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx}$$ ← 部分積分法

| 積分 | $e^x$ | $-\cos x$ |
|---|---|---|
| | $e^x$ | $\sin x$ |
| 微分 | $e^x$ | $\cos x$ |

$$=\Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}-e^0\sin 0-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx}$$ ← 部分積分法

| 積分 | $e^x$ | $\sin x$ |
|---|---|---|
| | $e^x$ | $\cos x$ |
| 微分 | $e^x$ | $-\sin x$ |

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left\{\Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx\right\}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}-e^0\cos 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx\right\}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-0+1-\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx}$$

$I$ と同じ式が現れる。

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I$$

これより，$I=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I$ であるから　　$I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

別解　定積分 $I$，$J$ は，次のように求めることもできる。

連立方程式を利用する解法

練習 1 より $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)'\sin x\,dx=\Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-J$$

よって　　　$I+J=e^{\frac{\pi}{2}}$　……①

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)'\cos x\,dx=\Big[e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx=-1+I$$

よって　　　$I-J=1$　……②

①，② から　　$I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$，$J=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

不定積分の等式は「定数項の違いを無視すれば一致する」のいみであるので、不定積分の場合は積分定数が必要となる。

**研究）** 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

高次の形は一度に計算できないので
部分積分法で次数を下げよう

$n$ は 0 または正の整数とする。定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ は，次のように求められる。

$n=0$，$n=1$ のときは，それぞれ次のように計算される。

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$\sin^0 x=1$ として計算

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$n\geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\sin x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'dx\\
&=\Big[-\sin^{n-1} x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx\\
&=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx\\
&=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right)\\
&=(n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{aligned}$$

よって，$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ であるから，次の漸化式が成り立つ。

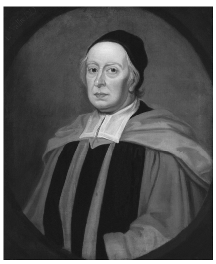
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

ウォリスの公式と呼ばれるものの一つ

したがって

$n$ が偶数のとき　$\displaystyle I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$n$ が奇数のとき　$\displaystyle I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$



John Wallis (1616～1703)
イギリスの数学者
無限大記号の「∞」を導入した

$n \geqq 0$ のときの値は，次のようにも表される

$m$ が自然数のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx$$
$$= \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)(2m-4)\cdots\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x\,dx$$
$$= \frac{2m(2m-2)(2m-4)\cdots\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 5\cdot 3}\cdot 1$$

これを用いて，$\pi$ の近似値が求められる。

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ では，$0 < \sin x < 1$ であるから　$\sin^{2m} x < \sin^{2m-1} x < \sin^{2m-2} x$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} x\,dx$$

したがって，$m$ が 2 以上の整数のとき

$$\frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)(2m-4)\cdots\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\cdots\cdots 4\cdot 2}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots\cdots 5\cdot 3}\cdot 1$$
$$< \frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7)\cdots\cdots 3\cdot 1}{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\cdots\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

変形して

$$\frac{\pi}{2} < 2m\cdot\frac{(2m-2)^2(2m-4)^2\cdots\cdots 4^2\cdot 2^2}{(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots\cdots 5^2\cdot 3^2} < \frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$m \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{2m}{2m-1}\cdot\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} 2m\cdot\frac{(2m-2)^2(2m-4)^2\cdots\cdots 4^2\cdot 2^2}{(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots\cdots 5^2\cdot 3^2}$$

この等式から，$\pi$ の近似値を計算してみると

$m = 10$ で　$\pi = 3.22108\cdots\cdots$

$m = 11$ で　$\pi = 3.18110\cdots\cdots$

上で得られた式をさらに変形すると

$\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$ や $\sqrt{\pi} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n\,!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$ が得られる（ $m$ を $n$ に代えている）

ウォリスの公式と呼ばれるものの一つ