積分法とその応用【定積分の置換積分法】　p.154～157

□定積分の置換積分法

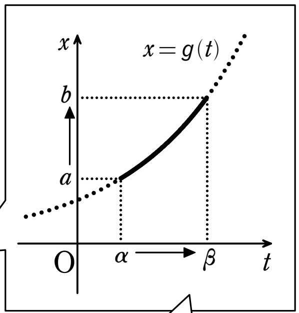
区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

x が微分可能な関数 $g(t)$ を用いて，$x=g(t)$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt}F(g(t))=f(g(t))g'(t)$$

$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とする。図のような x と t の関係を，

右の表のように表す。このとき



x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt&=\Big[F(g(t))\Big]_{\alpha}^{\beta}\\&=F(g(\beta))-F(g(\alpha))\\&=F(b)-F(a)\\&=\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

厳密には次の条件が必要

① t の区間 $[\alpha,\ \beta]$ において，$g'(t)$ が連続である。

② $[\alpha,\ \beta]$ における $g(t)$ の値域を D とするとき，

$g(\alpha)=a$，$g(\beta)=b$ で，かつ，a，$b\in D$ である。

となる。よって，次の公式が成り立つ。

定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

例８）　定積分 $\int_1^2 x(2-x)^4dx$ を求める。

$2-x=t$ とおくと

$x=2-t$

$\dfrac{dx}{dt}=-1$　より　$dx=(-1)dt$

$t=2-x$ に

$x=1$ を代入すると $t=1$

$x=2$ を代入すると $t=0$

また、x と t の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$1 \longrightarrow 0$

よって

$$\int_1^2 x(2-x)^4dx=\int_1^0(2-t)\cdot t^4\cdot(-1)dt$$

文字と同時に

範囲（上端・下端）も変える！

$$=\int_1^0(-2t^4+t^5)dt$$

上端・下端の交換

⇒被積分関数の符号を変える

$$=\int_0^1(2t^4-t^5)dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{t^6}{6}\right]_0^1$$

定積分では文字をもとに戻す必要は無い

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{7}{30}$$　㊚

積分法とその応用【定積分の置換積分法】 p.154～157

例題８） a は正の定数とする。定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ は $x^2+y^2=a^2$ の $y\geqq 0$ の部分であることから

解答 $\boxed{x=a\sin\theta \text{ とおく}}$ と $\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$

$\sqrt{a^2-x^2}$ **のときは** $x=a\sin\theta$ **とおくのは鉄則**

$dx=a\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\rightarrow a$
θ	$0\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$

x	$0\rightarrow a$
$\sin\theta$	$0\rightarrow 1$
θ	$0\rightarrow\dfrac{\pi}{2}$

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ である。

また，$a>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2}&=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\\&=\sqrt{a^2\cos^2\theta}\\&=|a\cos\theta|\\&=a\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta$$

変数はθなので a は外へ

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

次数下げ

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

別解 $x=a\cos\theta$ とおくと $dx=-a\sin\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右の表の通り

この範囲において $\sin\theta\geqq 0$ である

また $a>0$ であるから

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\sqrt{a^2\sin^2\theta}=a\sin\theta$$

よって $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(a\sin\theta)(-a\sin\theta)d\theta$

$$=a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-\sin^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi a^2$$

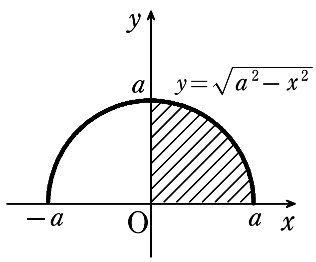
補足 例題 の定積分において，被積分関数

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

のグラフは，右の図のような半円周を表し，

定積分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の四分円

の面積を表す。



よって

$$S=\frac{1}{4}\times\pi\times a^2$$

円の面積の公式（四分円）

$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

積分法とその応用【定積分の置換積分法】 p.154～157

例題９） 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。

考え方 $x=\tan\theta$ **とおいて**，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

$dx=(\tan^2\theta+1)d\theta$

$dx=(x^2+1)d\theta$

$\dfrac{dx}{x^2+1}=d\theta$ である

解答 $\boxed{x=\tan\theta \text{ とおく}}$ と $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $\therefore\ dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

x	$0\longrightarrow 1$
$\tan\theta$	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

よって $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

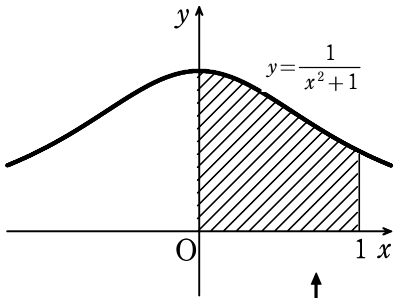
$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$



注意 被積分関数が $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ のときは，

$\boxed{x=a\tan\theta \text{ とおく}}$ とよい。

同じ領域

（平行移動しただけ）

補題 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$ を求めよ

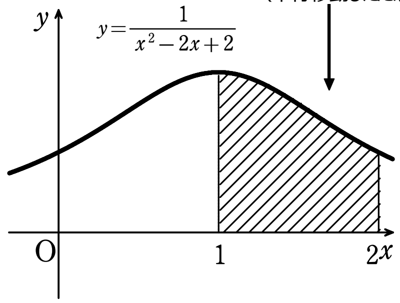
$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1}$ であるから

$x-1=\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$



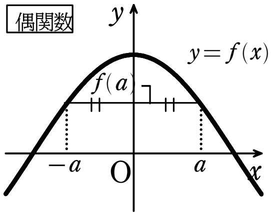
積分法とその応用【定積分の置換積分法】　p.154～157

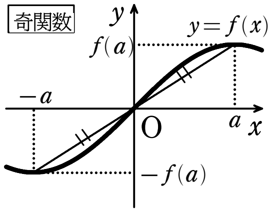
□偶関数，奇関数と定積分

関数 $f(x)$ において，　$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を **偶関数** といい，

$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を **奇関数** という*。

たとえば，x^2，$\cos x$ **は偶関数であり**，x，$\sin x$ **は奇関数**である。





＊ 偶関数のグラフは y 軸に関して対称
奇関数のグラフは原点に関して対称

関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のとき，次のことが成り立つ。

偶関数，奇関数と定積分

1　偶関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2　奇関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

半分だけ計算して２倍（下端が０になるので計算も楽）

上下で打ち消しあう

特に

$$\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$$

$$\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx=0$$

【証明】関数 $f(x)$ の定積分について，常に次の等式が成り立つ。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ において $x=-t$ とおくと　$dx=(-1)dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

したがって，① から　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}dx$

右辺において，

$f(x)$ が偶関数ならば，$f(-x)=f(x)$ から　$f(-x)+f(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

また，奇関数ならば，$f(-x)=-f(x)$ から　$f(-x)+f(x)=-f(x)+f(x)=0$

したがって，１，２が成り立つ。　終

例）　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-6x^2+5x+1)dx=2\int_{0}^{1}(-6x^2+1)dx$

x^3，$5x$ は奇関数，$-6x^2$，1 は偶関数

$$=2\Big[-2x^3+x\Big]_0^1=-2$$

例９）　(1)　$f(x)=\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

(2)　$f(x)=\sin x$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx=0$