積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】　p.148～149

□分数関数の不定積分

① 分母が単項式　⟹　分数式は整式にして単項式ごとにみる（以前のプリント）

② $\dfrac{\text{分母の微分}}{\text{分母}}$　⟹　置換積分法で $\log|\text{分母}|$　（以前のプリント）

③ 分母が多項式で（分母の次数）≦（分子の次数）⟹　$A=B\times Q+R$

④ 分母が因数分解可能　⟹　部分分数分解

補足 $\dfrac{(\text{定数})}{(1\text{次式})}$ なら②の形へ　$\dfrac{(\text{定数})}{(2\text{次式})}$ の形の場合は分母の判別式 D から

[1] $D>0 \Rightarrow$ $(\text{分母})=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形になるので部分分数分解へ

[2] $D=0 \Rightarrow$ $(\text{分母})=a(x-\alpha)^2$ の形になるので置き換えて計算

[3] $D<0 \Rightarrow$ $(\text{分母})=a\{(x-p)^2+q^2\}$ の形で高校数学の範囲外だが

$x-p=q\tan\theta$ とおいて置換積分法を利用する方法がある

例題５）　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2+3}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2-3x+2}dx$

解答 (1) $\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\dfrac{4}{x+1}=x-1+\dfrac{4}{x+1}$

$$\begin{array}{r|l} & x \quad -1 \\ \hline x+1 & x^2 \qquad +3 \\ & x^2+\ x \\ \hline & -x+3 \\ & -x-1 \\ \hline & 4 \end{array}$$

または

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 3 \\ & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{4} \end{array}$$

であるから

$$\int\frac{x^2+3}{x+1}dx=\int\left(x-1+\boxed{\frac{4}{x+1}}\right)dx$$

$x+1$ が x だったらいいのにな

$\Rightarrow (x+1)'=1$ より $\times\dfrac{1}{1}$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+4\log|x+1|+C$$

(2) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$ であるから

分子が１なら差を取ってでＯＫ

$\dfrac{1}{\text{大}-\text{小}}\left(\dfrac{1}{\text{小}}-\dfrac{1}{\text{大}}\right)$

$\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ とおくと

両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて　$x-3=(x-2)a+(x-1)b$

x について整理すると　　$x-3=(a+b)x-2a-b$

x の恒等式なので　$a+b=1$，　$-2a-b=-3$

$$\begin{array}{rr} & a+b=\ \ 1 \\ +) & -2a-b=-3 \\ \hline & -a\qquad=-2 \end{array}$$

これを解くと　$a=2$，　$b=-1$

よって　$\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$x-1$，$x-2$ がそれぞれ

x だったらいいのにな

$=2\log|x-1|-\log|x-2|+C$

$=\log|x-1|^2-\log|x-2|+C$

$=\log\dfrac{(x-1)^2}{|x-2|}+C$

$|x-1|^2=(x-1)^2$

$\log M-\log N=\log\dfrac{M}{N}$

積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】 p.148～149

□三角関数に関する不定積分

三角関数に関する積分では，半角の公式や倍角の公式がよく使われる。

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

また，三角関数の積を和や差の形にするとき，積和の公式が使われる。

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
を足したり引いたりするとできあがる。
覚えるより作れるように。

例題６） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin 3x\cos x\,dx$

解答 (1) $$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$
と分けても良い

(2) $$\int\sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$4x$， $2x$ がそれぞれ
x だったらいいのにな

$\sin 3x\cos x$
$$=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)$$

積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】 p.148～149

例題） 不定積分 $\int \sin^3 x\,dx$ を求めよ。

○相互関係→置換積分法

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx$$

$\cos x = u$ とおくと $-\sin x = \dfrac{du}{dx}$

$$\therefore\ \sin x\,dx = (-1)du$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x - \int u^2\cdot(-1)du$$
$$= -\cos x + \int u^2 du$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}u^3 + C$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$ より

$$\frac{1}{12}(4\cos^3 x - 3\cos x) - \frac{3}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

◎困ったら次数を下げて
倍角の関係性にもっていくと良い

◎ $(\sin x)^k \cos x$ や $(\cos x)^k \sin x$ など
1次の因数があるなら置換積分の形

○半角の公式→積和

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x \cos 2x\,dx$$

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}\{\sin 3x + \sin(-x)\}$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$$ なので

$$\int \sin^3 x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\int (\sin 3x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$$

○３倍角

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ なので

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int \sin x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\,dx$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x + C$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

積分法とその応用【いろいろな関数の不定積分】　p.148～149

例題）　不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を求めよ。

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

ここで　$\sin x = u$ とおくと　$\cos x = \dfrac{du}{dx}$ となるから　$\cos x\,dx = du$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot \cos x\,dx \\
&= \int \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \int \frac{-1}{u^2-1}du \\
&= -\int \frac{1}{(u+1)(u-1)}du \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du \\
&= -\frac{1}{2}(\log|u-1| - \log|u+1|) + C \\
&= \frac{1}{2}(-\log|u-1| + \log|u+1|) + C \\
&= \frac{1}{2}(\log|u+1| - \log|u-1|) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{|\sin x+1|}{|\sin x-1|} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{\sin x+1}{-(\sin x-1)} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C
\end{aligned}$$

差を取ってで処理

$$\frac{1}{大-小}\left(\frac{1}{小}-\frac{1}{大}\right)$$

$$\frac{1}{(u+1)-(u-1)}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)$$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より

$0 \leqq \sin x + 1 \leqq 2$ （中身正）

$-1 \leqq \sin x - 1 \leqq 0$ （中身負）