積分法とその応用【定積分】　p.151～153

□定積分

数学Ⅱで学んだように，関数 $f(x)$ の 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，次のように定義される。a をこの定積分の **下端**，b を **上端** という。

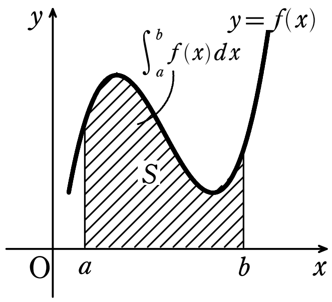
定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，
a，b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

上−下

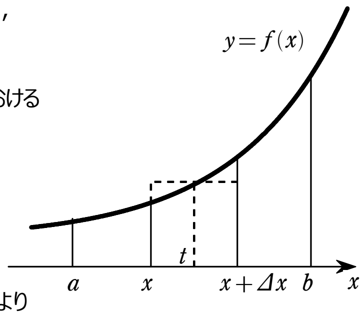
定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを，$f(x)$ を a **から** b **まで積分する** という。区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を表す。



証明 $a \leqq x \leqq b$ である任意の数 x に対して，a から x までの範囲で，
曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を $F(x)$ とする。
このとき，x の増分 $\Delta x(>0)$ に対し，区間 $[x,\ x+\Delta x]$ における
$f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$m\Delta x \leqq F(x+\Delta x)-F(x) \leqq M\Delta x$$

よって　$m \leqq \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leqq M$



$f(x)$ は区間 $[x,\ x+\Delta x]$ で連続であるから，中間値の定理により

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(t),\quad x<t<x+\Delta x$$

を満たす t が存在する。

$\Delta x \longrightarrow +0$ とすると $t \longrightarrow x$ となり，$f(x)$ は連続であるから $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$

よって $\lim\limits_{\Delta x\to +0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$

$\Delta x < 0$ の場合も同様に $\lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$ が成り立つ

したがって $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$ であるから

求める面積は $F(b)$ であり，$F(a)=0$ であるから

$$F(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

積分法とその応用【定積分】　p.151～153

例１） (1) $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$

$=\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$

$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$

数Ⅱの定積分と同様

不定積分を$[\quad]$で囲う

（積分定数Cは不要）

(2) $\int_0^{\pi} 6\sin 3\theta\,d\theta=\left[6\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\cos 3\theta)\right]_0^{\pi}$

3θがθだったらいいのにな

$=-2\left[\cos 3\theta\right]_0^{\pi}$

$=-2(\cos 3\pi-\cos 0)$

$=-2(-1-1)$

$=-2\cdot(-2)$

$=4$

□定積分の基本性質

数学Ⅱで学んだように，定積分について，次のことが成り立つ。

定積分の性質

1　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　　ただし，kは定数

2 & 3　$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

上端下端ひっくり返すと

符号も変わる

4　$\int_a^a f(x)dx=0$　　線分の面積は０

5　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

6　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

被積分関数が変わらなければ

つなげたり、ばらしたりしてもＯＫ

例７＋α） 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

分母が単項なので分割する

$=3\int_1^2\frac{dx}{x}-4\int_1^2 x^{-2}dx$

$=3\left[\log|x|\right]_1^2-4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$

区間$[1,\ 2]$において$x>0$であるから$\log x$でもよい

$=3(\log 2-\log 1)-4\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)\right\}$

符号注意

$=3(\log 2-0)-4\left(\frac{1}{2}\right)=3\log 2-2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x)\right\} dx$

積和の公式
（加法定理から作る）

$$= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\pi - \frac{1}{5}\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2} + \sin 0\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot 0 - 1 + 0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{5}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - 0 - 0 + 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

注意　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$ が成り立つことも注意しておこう

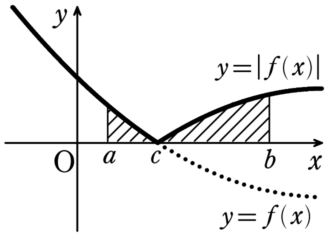
積分法とその応用【定積分】　p.151～153

□絶対値のついた関数の定積分

関数 $f(x)$ が　$a \leqq x \leqq c$ のとき　$f(x) \geqq 0$，　$c \leqq x \leqq b$ のとき　$f(x) \leqq 0$　であるとする。このとき，絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには，次のように区間を分けて行う。

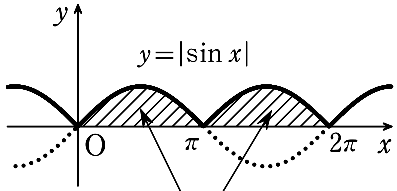
$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b \{-f(x)\}dx$$

この定積分 $\int_a^b |f(x)|dx$ は，$y=|f(x)|$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を表している。



まずは絶対値記号を外すことから！

例題７）　定積分 $\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x|dx$ を求めよ。



解答　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

よって

$$\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (-\sin x)dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= (-\cos\pi + \cos 0) + \left(\cos\frac{4}{3}\pi - \cos\pi\right)$$

$$= (1+1) + \left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{5}{2}$$

0 から 2π までのときは
グラフの周期性により

$$2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$
$$= 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$= 2(1+1)$$
$$= 4$$

と見ることもできる

練習１６）(2)　定積分 $\int_{-1}^{2} |e^x - 1|dx$を求めよ。

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき　$|e^x - 1| = 1 - e^x$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|e^x - 1| = e^x - 1$

であるから

$$\int_{-1}^{2} |e^x-1|dx = \int_{-1}^{0} (1-e^x)dx + \int_0^2 (e^x - 1)dx$$

$$= \Big[x - e^x\Big]_{-1}^{0} + \Big[e^x - x\Big]_0^2$$

$$= \left\{-1 - \left(-1 - \frac{1}{e}\right)\right\} + (e^2 - 2 - 1)$$

$$= e^2 + \frac{1}{e} - 3$$