積分法とその応用【不定積分とその基本公式】 p.138～141

□不定積分

基本数Ⅱと同じ

数学Ⅱで学んだように，x で微分すると $f(x)$ になる関数があれば，その関数を $f(x)$ の **原始関数** という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，すなわち $F'(x)=f(x)$ のとき，任意の定数 C に対して $\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$ が成り立つから，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。

また，$F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば，$G'(x)=F'(x)$となるから，$G(x)=F(x)+C$ を満たす定数 C が存在する。

以上からわかるように，関数 $f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある。その 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数全体は，次の形に書き表される。

$$F(x)+C \qquad C\text{ は任意の定数}$$

$$F(x)+C \underset{\text{積分する}}{\overset{\text{微分する}}{\rightleftarrows}} f(x)$$

この表示を $f(x)$ の **不定積分** といい，$\displaystyle\int f(x)dx$ で表す。

高校の積分法は連続関数に限るので不定積分と原始関数を区別せずに同じ意味で用いることもある

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する** といい，上の定数 C を **積分定数** という。また，$f(x)$ を **被積分関数** といい，xを 積分変数 という。

$f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \text{ただし，}C\text{ は積分定数}$$

注意 今後，「Cは積分定数」の断りを省略する。

関数の不定積分を求めるには，導関数の公式が逆に利用される。

実数 α について $(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int (x^{\alpha+1})'dx=(\alpha+1)\int x^{\alpha}dx$

$$x^{\alpha+1}+C_1=(\alpha+1)\int x^{\alpha}dx$$

$$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C=\int x^{\alpha}dx$$

$\dfrac{C_1}{\alpha+1}=C$ とする

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x} \Rightarrow \int(\log|x|)'dx=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log|x|+C=\int\frac{1}{x}dx$$

注意 $\displaystyle\int\frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある

x^{α} の不定積分

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \qquad \text{ただし，}\alpha\fallingdotseq -1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C \qquad (\alpha=-1\text{のとき})$$

真数の条件を満たすように$|x|$ とする

$$\frac{1}{\bigcirc+1}x^{\bigcirc+1}$$

①1加える

②分母に出す

積分法とその応用【不定積分とその基本公式】 p.138〜141

□不定積分の基本性質

関数の定数倍および和，差の不定積分

1 $\displaystyle\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ただし，k は定数

2 $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3 $\displaystyle\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

注意 上のように書いた不定積分についての等式では，両辺の積分定数の違いは無視することにする。

注意 不定積分を求める計算では，記号 $\int$ が取れた段階で積分定数 C をつければよい。

また，$\int 1dx$ は 1 を省略して $\int dx$ と書くことがある。

参考 積分変数として，x 以外の文字を用いることもある。 $\int$(● の関数)d●

例） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dy}{y^5}$　　(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx$

(4) $\displaystyle\int\sqrt[4]{t}\,dt$　　(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\int\frac{dx}{y^5}$ だと

$\displaystyle\frac{1}{y^5}\int dx=\frac{1}{y^5}x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{dy}{y^5}=\int y^{-5}dy=\frac{1}{-5+1}y^{-5+1}+C=-\frac{1}{4}y^{-4}+C=-\frac{1}{4y^4}+C$

(3) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

① 1 加える

$\displaystyle\frac{1}{○+1}x^{○+1}$

②分母に出す

(4) $\displaystyle\int\sqrt[4]{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}t^{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{5}t\sqrt[4]{t}+C$

答えの表記に合わせよう

(5) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

検算で確認しよう

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$

積分法とその応用【不定積分とその基本公式】 p.138～141

例） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^2dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{2x-3x^2}{\sqrt{x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx$

解説

(1)
$$\int\frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^3}dx$$
$$=\int\left(1-\boxed{\frac{2}{x}}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$$
$$=\int dx-2\int\frac{dx}{x}-3\int x^{-2}dx+6\int x^{-3}dx$$
$$=x-2\log|x|+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+C$$

分数式は整式にして
単項式ごとにみる

$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ だけは
$\log|x|$ への流れ

略しても良い

(2)
$$\int\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(9x^4-6x+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=9\int x^4dx-6\int xdx+\int x^{-2}dx$$
略しても良い
$$=\frac{9}{5}x^5-3x^2-\frac{1}{x}+C$$

(3)
$$\int\frac{2x-3x^2}{\sqrt{x}}dx=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$
$$=2\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{2}}dx$$
略しても良い
$$=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$
$$=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+C$$

(4)
$$\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx=\int\frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x}dx$$
$$=\int\left(\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\boxed{\frac{1}{x}}\right)dx$$
$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int\frac{dx}{x}$$
略しても良い
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+6x^{\frac{1}{2}}+\log|x|+C$$

関数 $\dfrac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}$ において $\sqrt{x}$ と分母 x より $x>0$ であるから
$$\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+3x+6\sqrt{x}+\log x+C$$

絶対値の中身の
正負が決まるケース

積分法とその応用【不定積分とその基本公式】　p.138～141

□三角関数，指数関数の不定積分

微分にて次の公式を学んだ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\log a$

また $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ から，次の公式が得られる。

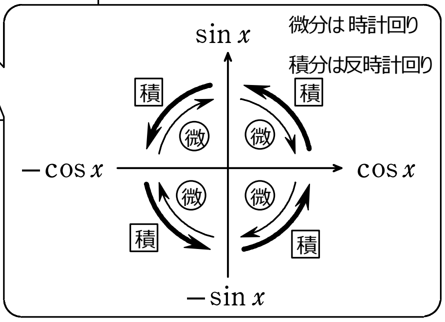
三角関数，指数関数の不定積分

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C,\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C,\qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$

$\int \tan x\,dx$ はのちほど



例３＋α）　(1) $\displaystyle\int (2\sin x+3\cos x)dx=2\int \sin x\,dx+3\int \cos x\,dx$

$$=-2\cos x+3\sin x+C$$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\tan x-x+C$$

$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

より $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

(3) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx=\int\left(2\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=2\sin x-\tan x+C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta-1}=-\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=-\tan\theta+C$

(4) $\displaystyle\int (2-\tan\theta)\cos\theta\,d\theta=\int(2\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$$=2\sin\theta+\cos\theta+C$$

(4) $\displaystyle\int (3e^x-2^x)dx=3\int e^x dx-\int 2^x dx=3e^x-\frac{2^x}{\log 2}+C$　終