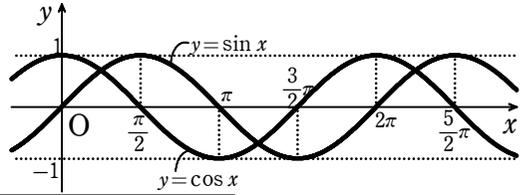


極限【三角関数と極限】 p.56~60

三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は周期関数であり、 2π ごとに同じ値を繰り返すから、 $x \rightarrow \infty$ のときの関数の値は一定の値に近づかない。すなわち、 $x \rightarrow \infty$ のときの

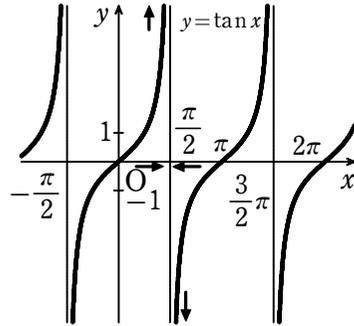


$\sin x$, $\cos x$ の極限はない。 数列では「振動」と言ったが関数では「極限がない」

また、 $\tan x$ については、次のことがいえる。

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \tan x = \infty$$

注意 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない。



例 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{終}$$

0 に近づく

0 に近づく

注意 遠くに行く ($x \rightarrow \pm\infty$) より 近くに来る方が処理しやすかったりする。

そこで $\frac{1}{x} = t$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ よって $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$

関数の極限には、次の性質もある。

関数の極限の性質 (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

【追い越し禁止】 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

【はさみうちの原理】 $x = a$ の近くで常に

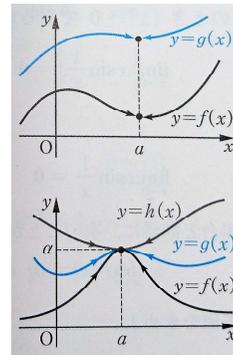
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ かつ } \alpha = \beta \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$$

※ 「 $x = a$ の近くで」を「十分大きい x で」と読みかえると、

$x \rightarrow \infty$ のときにも成り立つ。同様に、 $x \rightarrow -\infty$ のときにも成り立つ。

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ のとき、次のことも成り立つ。

十分大きい x で常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$



応用例題 7) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ を求めよ。

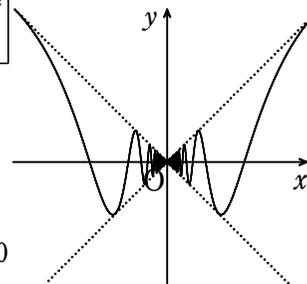
x は正負不明なので絶対値で処理

解答 $0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ より $0 \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

すなわち $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$



※ グラフを見ると明らか

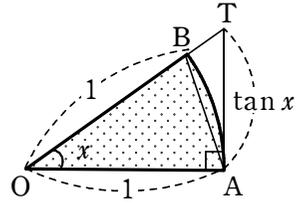
注意 数列の場合と同様に、次のことが成り立つ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

□ **重要** $\frac{\sin x}{x}$ の極限

【証明】[1] $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

右の図のように、半径が1、中心角が x ラジアン の扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると、面積について



$$\triangle OAB < \text{扇形OAB} < \triangle OAT$$

が成り立つから $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

すなわち $\sin x < x < \tan x$

$\sin x > 0$ より $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ 各辺を $\sin x$ で割った

よって $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ …… ① 逆数をとる⇒大小反転

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ であることと、はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

[2] $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき

$0 < -x < \frac{\pi}{2}$ であるから、① により

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x)$$

すなわち $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

以上から、 $x=0$ の近くで $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ であることと、はさみうちの原理により

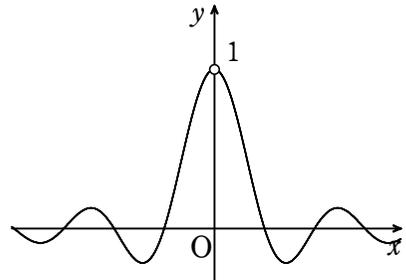
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

[1][2] から $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

不定形 $\frac{0}{0}$ の解消

別解 $x = -\theta$ とおいて

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



※グラフにするとこのような感じ
(縦横比はいじってあります)

$\lim_{\substack{\bullet \rightarrow 0 \\ \blacksquare \rightarrow 0}} \frac{\sin \blacksquare}{\bullet} = 1 \quad (\bullet \rightarrow 0 \text{ のとき } \blacksquare \rightarrow 0) \quad \text{※上下同じ式!}$

他にも $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

などはよく見る式である。

極限【三角関数と極限】 p.56~60

例題 1 2 + α) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x}$

帳尻合わせ

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right)$ ← 上下同じ式に

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{x} + \frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} + 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}$

$$= \frac{7 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 6$$

別解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 7x}{\sin 2x} + \frac{\sin 5x}{\sin 2x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \right)$
 $= \frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{12}{2} = 6$

類問 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

$x \rightarrow 0$ のときははさみうちの原理で

解説

(1) $x - \frac{\pi}{2} = \theta$ とおくと $x = \theta + \frac{\pi}{2}$ であり、 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $\theta \rightarrow 0$

よって $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \theta}{\theta} \right) = -1$

(2) $\frac{1}{x} = \theta$ とおくと、 $x \rightarrow \infty$ のとき $\theta \rightarrow +0$

よって $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

応用例題7 + α) 次の極限を求めよ。

いかにして $\frac{\sin x}{x}$ の形を作るか
 $\Rightarrow \cos \theta$ がらみは
 $\cdot (\cos x + 1)(\cos x - 1) = \cos^2 x - 1$
 $\qquad\qquad\qquad = -\sin^2 x$
 $\cdot \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
 などを活用する!

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$ 分母分子に $(\cos x + 1)$ をかける

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$ $\frac{\sin x}{x}$ を作る

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x + 1} \right)$

$= -1 \cdot \frac{0}{1+1}$ ここは代入しても問題ない

$= 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$ 分母分子に $(1 + \cos x)$ をかける

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$ $\frac{\sin x}{x}$ を作る

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right\}$

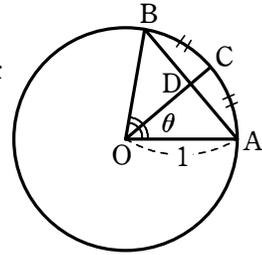
$= 1 \cdot 2$ ここは代入しても問題ない

$= 2$

□三角関数の極限の応用

応用例題 8) 半径 1 の円 O の周上に中心角 θ ラジアン の弧 AB をとり、弧 AB を 2 等分する点を C とする。また、線分 OC と弦 AB の交点を D とする。このとき、

極限 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2}$ を求めよ。



方針 … 線分の長さを θ の関数で表す。

$\theta \rightarrow +0$ の極限なので
 $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ と見てよい

解答 $AB \perp OD$ で、OD は $\angle AOB$ の二等分線であるから $\angle AOD = \frac{\theta}{2}$

よって $AB = 2AD = 2\sin \frac{\theta}{2}$, $CD = OC - OD = 1 - \cos \frac{\theta}{2}$

したがって、求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\left(2\sin \frac{\theta}{2}\right)^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{4\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{4\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{4\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

AB は直角三角形なので定義から求める
(余弦定理を用いると $AB = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$
となり大変)

別解 OC と円 O の交点のうち、C でない方の点を E とすると方べきの定理により $DE \cdot DC = DB \cdot DA$
 $DA = DA = \frac{1}{2} AB$ であるから
 $DE \cdot DC = \frac{1}{4} AB^2$ よって $\frac{CD}{AB^2} = \frac{1}{4DE}$
 θ が 0 に近づくとき DE は CE つまり円の直径に近づくことから求めることもできる

練習 3 5) 弧 AB の長さを \widehat{AB} で表すとき、極限 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{\widehat{AB}^2}$ を求めよ。

解答 $AB \perp OD$ で、OD は $\angle AOB$ の二等分線であるから $\angle AOD = \frac{\theta}{2}$

よって $CD = OC - OD = 1 - \cos \frac{\theta}{2}$

また $\widehat{AB} = 1 \cdot \theta = \theta$

したがって、求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{\widehat{AB}^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} \right\} = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

半径が r 、中心角が θ である扇形の弧の長さは $l = r\theta$

極限【三角関数と極限】 練習問題

練習32) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$$

解説

$$(1) 0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ より } 0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\text{ここで, } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = 0 \text{ よって } \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$(2) 0 \leq |\sin x| \leq 1 \text{ より } 0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{ここで, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0 \text{ よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$(3) 0 \leq |\cos x| \leq 1 \text{ より } 0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| = \frac{|\cos x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{ここで, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| = 0 \text{ よって } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

練習33) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$x \neq 0$ のとき $\sin x \neq x \neq \tan x$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

練習34) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right\} = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1) \right\} = -1 \cdot 2 = -2 \end{aligned}$$

極限【三角関数と極限】 練習問題

問題 1 1) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - 1}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin 3x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 - 2\sin^2 x) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \right\} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \tan x}{\sqrt{\cos 2x} - \cos x} + \frac{x}{\tan 2x} \right)$$

【岩手大】

解説

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sqrt{\cos 2x} - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (\sqrt{\cos 2x} + \cos x)}{\cos 2x - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (\sqrt{\cos 2x} + \cos x)}{(2\cos^2 x - 1) - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\sqrt{\cos 2x} + \cos x)}{-\cos x (1 - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\sqrt{\cos 2x} + \cos x)}{-\cos x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt{\cos 2x} + \cos x}{\cos x} \right) \\ &= -1 \cdot \frac{1+1}{1} = -2 \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{2} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \tan x}{\sqrt{\cos 2x} - \cos x} + \frac{x}{\tan 2x} \right) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$