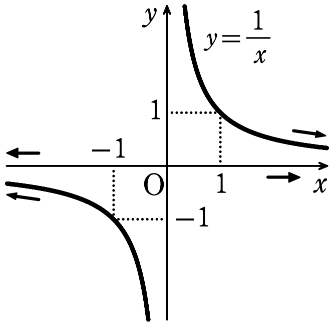
# 極限【 $x \to \pm\infty$ のときの極限】 p.52～54

**【内容目標】 $x\to\infty$ や $x\to-\infty$ のときの極限値を求められるようになろう。**

変数 $x$ が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow \infty$ で書き表す。また，$x$ が負で，その絶対値が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow -\infty$ で書き表す。

一般に，$x \longrightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくならば，この値 $\alpha$ を $x \longrightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の **極限値** または **極限** という。このことを，次のように書き表す。

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$




$x \longrightarrow -\infty$ のときも同様に考える。たとえば，次のようになる。

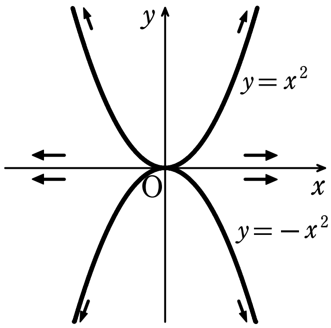
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$x \longrightarrow \infty$ や $x \longrightarrow -\infty$ のときに，関数 $f(x)$ の極限が $\infty$ または $-\infty$ になる意味も，$x \longrightarrow a$ のときと同様に考える。

たとえば，次のようになる。

$$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty, \quad \lim_{x\to\infty}(-x^2)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$$




**例１４類題）** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}$

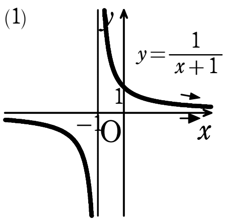
(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1-x^2)$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)$

解説

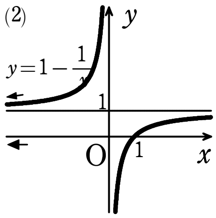
(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0 \leftarrow \frac{\text{定数}}{\infty}$ の形 (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \leftarrow \frac{\text{定数}}{-\infty}$ の形 (3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}=0$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1-x^2)=-\infty$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)=-\infty$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)=\lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right)=-\infty$

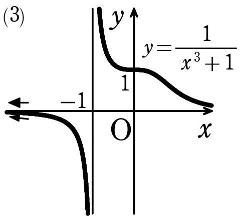
参考 (1)



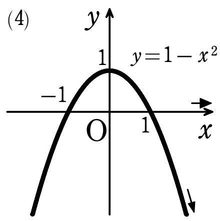

(2)



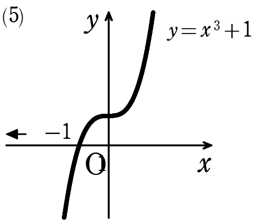

(3)



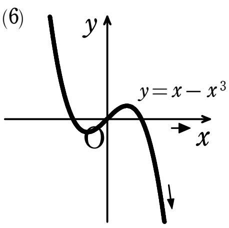

(4)




(5)




(6)




グラフの形や

漸近線に注意しよう！

## 極限【 $x\to\pm\infty$ のときの極限】 p.52～54

**例題１１）** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}$

(解説)

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

分母の極限が有限な値となるように

分母と分子を $x^2$ で割る。

$$\frac{2-0}{3-0+0}$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=-\infty$$

分母と分子を分母の最高次 $x$ で割る。

$$\frac{-\infty+0}{1-0}$$

**応用例題５）** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$

(解説)

(1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

分子の有理化

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+x)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$x$ は正の∞に近づいていくので

$|x|=x$ と処理

(慣れてきたら略してもよい)

分母分子を

分母の最高次 $x$ で割る

(2) $\boxed{\text{方針}}$ $x\longrightarrow-\infty$ だと考えづらいので変換する

$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t}}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$t$ は正の∞に近づいていくので

$|t|=t$ と処理

(慣れてきたら略してもよい)

$\boxed{\text{別解}}$ 置き換えないと…

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$$

$x\longrightarrow-\infty$ なので

$|x|=-x$ と処理！