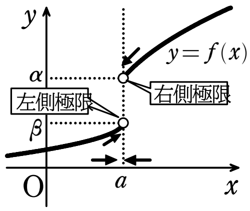
関数と極限【片側からの極限】　p.50～51

【内容目標】右側極限・左側極限の考え方を理解して求められるようになろう。

［310新編 数学Ⅲ 本文ページ107］

関数 $f(x)$ において，x が a に限りなく近づくとき，$x>a$ あるいは$x<a$ など片側の範囲だけで極限を考える場合がある。

一般に，$x>a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の **右側極限** といい，「 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$ 」のように書き表す。



$x<a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの **左側極限** も同様に定義され，その極限値が β のとき，「 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\beta$ 」のように書き表す。

右側極限，左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合には，
たとえば $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ ように書き表す。

$a=0$ のときは，$x\longrightarrow a+0$，$x\longrightarrow a-0$ をそれぞれ「$x\longrightarrow +0$」「$x\longrightarrow -0$」のように書く。
関数 $f(x)$ において，次のことが成り立つ。

『 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ 』

両側からの極限が等しいときに
「**極限が存在する**」と言える
（存在するときに$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$とかける）

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ がともに存在してもそれらが
一致しないときもある。**一致しないとき**，$x\longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限はない**。

「$x=a$ で $f(x)$ は定義されない」
（不連続）とは別なこと

例１２）関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ は

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{x}=x+1 & (x>0)\\[2mm] \dfrac{x(x+1)}{-x}=-x-1 & (x<0)\end{cases}$$

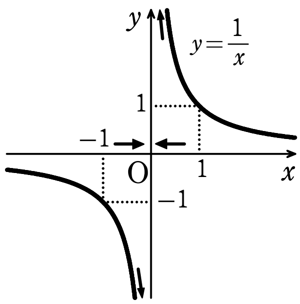
と表され　$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x)=-1$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない。

例１３）関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$$



よって，$x\longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない。