極限【関数の極限】　p.45～49

【内容目標】関数の極限の計算ができるようになろう。

□関数の極限とその性質

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の **極限値** または **極限** という。このことを，次のように書き表す。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

数列の場合と同様に，関数の極限について，次のことが成り立つ。

○極限値と四則　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする。

1　$\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$　ただし，k は定数　　2　$\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$

3　$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$　　4　$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　ただし，$\beta \fallingdotseq 0$

x の整式で表される関数や分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などについては，a が関数 $f(x)$ の定義域内の値であれば，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

指数関数，対数関数，三角関数の極限については，123 ページ以降で。

例８） (1) $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x - 4) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$

(2) $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{2 \cdot (-1) + 1}{-1+3} = -\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x+4} = \sqrt{4} = 2$

不定形ではない、
分母が０にならない のであれば
２年生のとき同様代入で

□極限の計算

極限値の定義からもわかるように，関数 $f(x)$ が $x = a$ で定義されていなくても，$x \longrightarrow a$ のときの極限値が存在することがある。

不定形でも因数分解ができるときは
２年生のとき同様
因数分解→約分で解決

例９） 関数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ は，

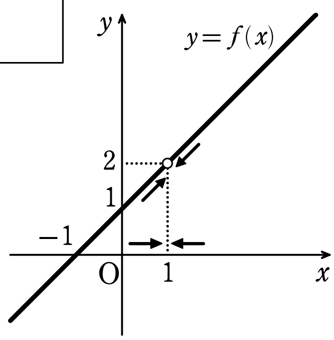
$x = 1$ で定義されていないが，

$x \fallingdotseq 1$ のとき

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

となる。よって

$x \longrightarrow 1$ のとき $f(x) \longrightarrow 2$　終



極限【関数の極限】 p.45～49

例題９） 次の極限を求めよ。**不定形となるとき（分数関数）**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$ 　$\frac{0}{0}$ 　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$ 　$\infty-\infty$

解答 (1)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

因数分解＋約分で回避

$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)$$

$$=3$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(2+x)-2}{2(2+x)}\right\}$$

通分＋約分で回避

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(2+x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(2+x)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

例題１０） 次の極限を求めよ。**不定形となるとき（無理関数を含むとき）**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$\frac{0}{0}$

解答

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

分母or分子の有理化で
不定形を解消する

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

極限【関数の極限】　p.45～49

□極限値による定数の決定

例えば $\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}=2\cdot0=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

が成り立つ。つまり $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\text{ , }\lim_{x\to a}g(x)=0\text{ならば}\lim_{x\to a}f(x)=0}$ このことを利用する。

応用例題４） 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

$\dfrac{f}{g}$ が収束するのに
分母 g が０に収束するなら
分子 f も０に収束して
不定形になるはず

解答

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2 \quad\cdots\cdots ①$$

が成り立つとする。**分母** $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから

分子 $\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

よって，$a+b=0$ となり　$b=-a$　$\cdots\cdots$ ②

このとき $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$　②代入 → $\dfrac{0}{0}$ の不定形に

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$　有理化

約分　$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{a}{2}$

これで代入しても
不定形でなくなった

$\dfrac{a}{2}=2$ のとき ① が成り立つから　$a=4$

このとき，② から　$b=-4$　　答　$a=4$，$b=-4$

注意 「このとき…」からは逆の確認になっている。必要条件から導かれる②の式を①の左辺に代入することで

十分条件も成り立つことを確認している。

例えば、$x\longrightarrow1$ のとき $\dfrac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ が極限値をもつように定数 a の値を定めたいときに、

$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}-4)=0$ より $a=4$ を求めただけでは不十分になる（極値をもつことも確認しよう）。

「等式 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{ax^2+a}{b(x-3)}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。」という問題では

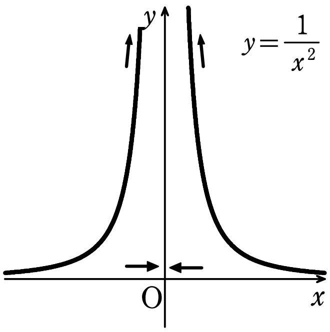
$\displaystyle\lim_{x\to3}(ax^2x+a)=0$ から求めた $a=-\dfrac{1}{3}$，0 で終えてはいけない（ $a=0$ は不適である）。

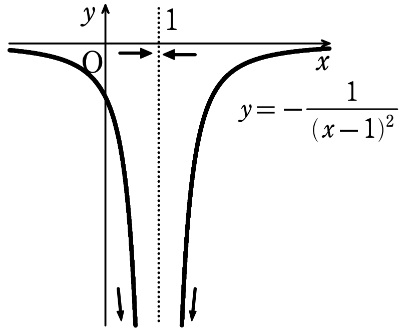
極限【関数の極限】　p.45～49

□極限が有限な値でない場合

　関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は **正の無限大に発散** する 」 または 「 $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の 極限は ∞ である 」といい，「 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ 」 や「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow \infty$ 」のように書き表す。また，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は 負の無限大に発散 する 」 または 「 $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$の極限は $-\infty$ である 」といい，「 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ 」や「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow -\infty$ 」のように書き表す。 **注意** 極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを関数の<u>極限値</u>とはいわない。

例）　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$　　　$\lim\limits_{x \to 1} \left\{ -\dfrac{1}{(x-1)^2} \right\} = -\infty$





練習２３＋α）　次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty$　　(2) $\lim\limits_{x \to -1} \left\{ -\dfrac{1}{(x+1)^2} \right\} = -\infty$　　(3) $\lim\limits_{x \to -2} \left\{ 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2} \right\} = -\infty$