極限【点の運動と無限等比級数】　p.39, 40, 43

【内容目標】無限等比級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになろう。

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots \qquad ①$$

を，初項 a，公比 r の **無限等比級数** という。 ① の第 n 項までの部分和を S_n とする。

□無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ の収束，発散は，次のようになる。

$a=0$ のとき　収束し，その和は 0 である。

$a \fallingdotseq 0$ のとき　$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geqq 1$ ならば発散する。

また，無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ が収束するための必要十分条件は

$$a=0 \quad \text{または} \quad |r|<1$$

応用例題３） 数直線上で，点 P が原点 O から出発して，正の向きに 1 だけ進み，次に負の向きに $\dfrac{1}{2}$ だけ進む。更に，正の向きに $\dfrac{1}{2^2}$ だけ進み，次に負の向きに $\dfrac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

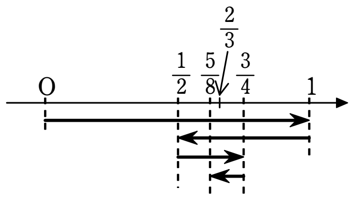
(解説)

点 P の座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots\cdots$$

ゆえに，点 P が近づいていく点の座標を x とすると，

x は初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数で表される。



$\left|-\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

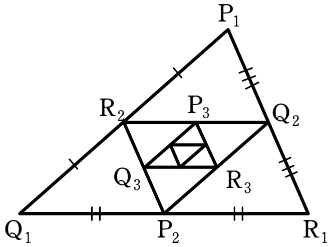
$$x=\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

よって，点 P が近づいていく点の座標 x は　　$x=\dfrac{2}{3}$

点の運動と
無限等比級数

極限【循環小数と無限等比級数】　p.39, 40, 43

問題５類題） 面積が a の $\triangle\mathrm{P_1Q_1R_1}$ がある。



右の図のように，$\triangle\mathrm{P_1Q_1R_1}$ の各辺の中点を頂点として $\triangle\mathrm{P_2Q_2R_2}$ を作り，次に $\triangle\mathrm{P_2Q_2R_2}$ の各辺の中点を頂点として $\triangle\mathrm{P_3Q_3R_3}$ を作る。

以下，同様にして作られる次の三角形の面積の総和 S を求めよ。

$\triangle\mathrm{P_1Q_1R_1}$，$\triangle\mathrm{P_2Q_2R_2}$，$\triangle\mathrm{P_3Q_3R_3}$，……，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$，……

解説

$$\triangle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1} \backsim \triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$$

であり，相似比は $1:2$ であるから，面積比は $1^2:2^2$ である。

$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ の面積を S_n とすると　$S_{n+1}:S_n=1^2:2^2$　$\therefore\ 2^2S_{n+1}=1^2S_n$

$$S_{n+1}=\frac{1^2}{2^2}S_n=\frac{1}{4}S_n,\ \ S_1=a$$

よって，数列 $\{S_n\}$ は初項 a，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比数列である。

ゆえに，面積の総和 S は，初項 a，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数で表され，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから収束する。

したがって　$S=\dfrac{a}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}a$

□循環小数と無限等比級数

例６） 循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8}$ を分数で表す。

$$\begin{aligned}0.3\dot{1}\dot{8}&=0.3181818181818181818\cdots\\&=0.3+0.018+0.00018+0.0000018+\cdots\cdots\end{aligned}$$

○桁循環
→ $10^{-○}$

であり，右辺の第２項以降は，初項 0.018，公比 $10^{-2}=\dfrac{1}{100}=0.01$ の無限等比級数となる。公比について，$|0.01|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$\begin{aligned}0.3\dot{1}\dot{8}&=0.3+\frac{0.018}{1-0.01}\\&=\frac{3}{10}+\frac{18}{990}\\&=\frac{315}{990}\\&=\frac{7}{22}\end{aligned}$$

終

極限【無限級数の性質】　p.41

□無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき，「数列の極限の性質 (1)」から，次の性質が得られる。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ と考えれば，数列の極限の性質が使える

無限級数の性質

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ のとき

1　$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$　　ただし，k は定数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} ka_i\right)$$
$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k\cdot S$$

2　$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = S+T$，

　$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = S-T$

収束するか不明のうちにいきなり

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とは書かない。

（$a_n = n$，$b_n = \frac{1}{2^n} - n$ とすると成り立たない）

例題８） 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ。

まずは収束するか確認する

解答　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$，$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから，これらの無限等比級数は

ともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

□無限級数の収束・発散と項の極限

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散と，数列 $\{a_n\}$ の極限について調べよう。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，その和を S，第 n 項までの部分和を S_n とすると，数列 $\{S_n\}$ は S に収束する。

$n \geqq 2$ ならば　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$　よって　$a_n = S_n - S_{n-1}$

この無限級数が収束するとき，その和を S とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

これより，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ。

収束するなら

足していくものが 0 に近付く

極限【無限級数の収束・発散と項の極限】

前ページで調べたことから，次が成り立つ。2 は 1 の対偶である。

1　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は和が収束するための必要条件であるが十分条件ではない

参考

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件はコーシー列をなすことである。（コーシーの収束判定法）

<注意>　1，2 の逆は成り立たない。

（$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない）

たとえば，例題 5 の無限級数について，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

であるが無限級数は発散する。

例 7 ） 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ の収束，発散を調べる。

第 n 項を a_n とすると　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ であるから，この無限級数は発散する。　終

手順① 数列 $\{a_n\}$ の極限を調べる

手順② 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しなければ発散する

手順③ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のときは第 n 項までの部分和 $\{s_n\}$ を求めて数列 $\{S_n\}$ の収束・発散を調べる

コラム $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は発散する？

無限級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$ の第 8 項までの和について

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}$$

となります。同様にして，一般に第 2^m 項までの部分和 S_{2^m} について，$S_{2^m} \geqq 1+\dfrac{m}{2}$ が成り立つ

ことがわかります。このことから，この無限級数は発散することを示してみましょう。

証明

$$S_{2^m} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{m}{2}$$

$\lim_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{2}\right)=\infty$ から $\lim_{m\to\infty} S_{2^m}=\infty$ であり、$\lim_{m\to\infty} S_{2^m}=\infty$ から 部分和 S_n も

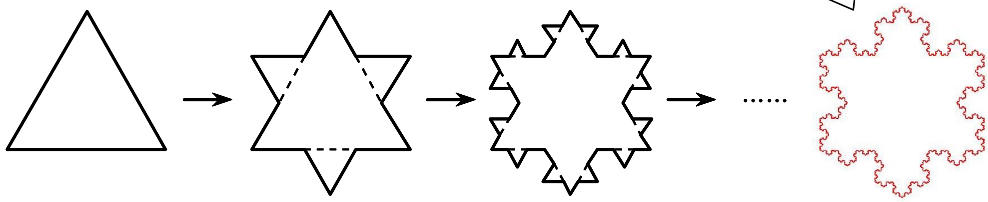
$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ となり、無限級数は正の無限大に発散する。

コラム　フラクタル図形

1 辺の長さが 1 の正三角形に，以下の操作 (＊) を繰り返し行います。

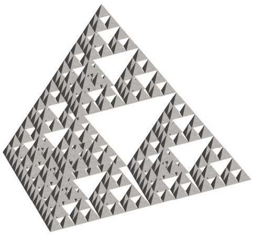
操作 (＊) $\begin{cases} \text{すべての辺を 3 等分する。3 等分した中央の線分を，} \\ \text{それを底辺とする正三角形の残りの 2 辺でおき換える} \end{cases}$

無限に繰り返したときに得られる図形をコッホ雪片という



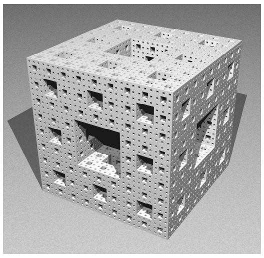
操作 (＊) を繰り返したときに得られる図形は，一部分を拡大すると，もとの図形と同じ部分が現れます。このような図形は**フラクタル図形**と呼ばれる図形の一種で，雪の結晶など，自然界においても似た形が見られます。また，ヒートアイランド現象対策の日除けなど，私たちの身の回りの生活にもフラクタル図形は利用されています。

コッホ雪片



シェルピンスキー四面体

カントールの三進集合



メンガーのスポンジ

練習）　1 辺の長さが 1 の正三角形に，上の操作 (＊) を n 回繰り返したときに得られる図形を A_n とします。$n \to \infty$ のとき，図形 A_n の面積は収束するが周の長さは発散する，すなわち，面積は有限であるにもかかわらず，周の長さは無限大であるという，不思議な性質があることが知られています。このことを確かめてみよう。

図形 A_n の辺の数を E_n，面積を S_n，周の長さを L_n とする。n を 0 以上の整数とする。図形 A_0 を一辺の長さが 1 の正三角形とすると　$E_0=3$，$S_0=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$L_0=3$

図形 A_n から図形 A_{n+1} を作るとき，図形 A_n の 1 つの辺が 4 つの辺に分けられるから　$E_n=3\cdot 4^n$

よって，図形 A_n から図形 A_{n+1} を作るときに加わる正三角形の面積の和は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot E_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3\cdot 4^n=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

よって　$S_{n+1}=S_n+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

ゆえに，$n \geqq 1$ のとき　$S_n=S_0+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$　一方，$L_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\cdot E_n=3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n=\infty$

以上より，図形 A_n の面積は収束するが，周の長さは発散する。

海岸線のパラドックスなどがある