極限【無限等比級数】 p.37～38

【内容目標】無限等比級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになろう。

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots \qquad ①$$

を，初項 a，公比 r の **無限等比級数** という。 ① の第 n 項までの部分和を S_n とする。

□無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ の収束，発散は，次のようになる。

$a=0$ のとき 収束し，その和は 0 である。

$a \fallingdotseq 0$ のとき $|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geqq 1$ ならば発散する。

	$\lvert r\rvert<1$	$\lvert r\rvert \geqq 1$
$a=0$	収束	収束
$a \fallingdotseq 0$	収束	発散

また，無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ が**収束するための必要十分条件**は

$\boxed{a=0 \quad \text{または} \quad |r|<1}$

例題６） 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$　　(2) 初項 1，公比 $-\sqrt{3}$

解答 (1) 初項が 2，公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，

|公比|＜1

その和は $\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}}=3$

$\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}$

(2) 初項が 1，公比について $|-\sqrt{3}|>1$ であるから，発散する。

|公比|≧1

例題７） 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots\cdots$$

解答 初項が x，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x=0$ または $|1-x|<1$

初項＝0 または |公比|＜1

$|1-x|<1$ のとき

$-1<1-x<1$ すなわち $0<x<2$

$|\bigcirc|<1 \Longrightarrow -1<\bigcirc<1$

よって，求める x の値の範囲は $0 \leqq x < 2$

初項の条件を合わせる