極限【無限級数】　p.35～36

【内容目標】無限級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになろう。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ において，a_1 をその 初項，a_n を 第 n 項 という。

無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの**部分和** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ を第 n 項として，新たに次の無限数列 $\{S_n\}$ ： S_1，S_2，S_3，……，S_n，……を作る。 無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき，すなわち『 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$ 』となるとき，無限級数 は S に **収束** する，または無限級数の和 は S であるという。この和 S も $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表すことがある。

無限級数は $\sum_{n=1}^{\infty}$ (一般項) と表すときもある

無限級数の和

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ の第 n 項までの部分和 S_n から作られる

無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である。

無限級数の和
＝部分和の極限値

※　無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 は **発散** するという。

例題４） 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots\cdots$$

解答　$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{(n+1)-n}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

部分分数分解 $\dfrac{1}{大-小}\left(\dfrac{1}{小} - \dfrac{1}{大}\right)$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

和の一般項を用いて極限を考えよ！

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

よって　$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$

したがって，この無限級数は収束して，
その和は１である。

$1-1+1-1+\cdots\cdots$
$=(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots=0$
$=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\cdots=1$
なので無限回の括弧では判断できないので注意

例題５） 次の無限級数は発散することを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots\cdots$$

解答　$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

分母の有理化

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots\cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$= \sqrt{n+1} - 1$$

打ち消し合う

よって　$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$

したがって，この無限級数は発散する。

部分和(n の式)を求める ⇒ $n \longrightarrow \infty$ をする