極限【無限等比数列】 p.31～34

【内容目標】無限等比数列の収束条件を理解しよう！

初項に一定の数 r (公比) を次々と掛けて得られる項が無限に続く等比数列を **無限等比数列** という。

初項 r，公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べてみよう。

[1] $r>1$ のとき　$r=1+h$ とおくと　$h>0$，$r^n=(1+h)^n$

二項定理により　$(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$

$$=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n$$

$h>0$ であるから　$r^n\geqq 1+nh$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$

> 別解　$r^2>1$，$r^3>1$，……，$r^{n-1}>1$
> であるから　$1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}>n$
> よって　$\dfrac{r^n-1}{r-1}>n$　すなわち　$r^n>n(r-1)+1$
> ここで　$\lim\limits_{n\to\infty}\{n(r-1)+1\}=\infty$ であるから
> $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$

[2] $r=1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

[3] $0<r<1$ のとき　$\dfrac{1}{r}=s$ とおくと

$s>1$，$r^n=\dfrac{1}{s^n}$

[1] により，$\lim\limits_{n\to\infty}s^n=\infty$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{s^n}=0$

[4] $r=0$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\lim\limits_{n\to\infty}0^n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$

[5] $-1<r<0$ のとき　$-r=s$ とおくと　$0<s<1$，$|r^n|=s^n$

[3] により，$\lim\limits_{n\to\infty}s^n=0$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=0$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$

> $-|r^n|\leqq r^n\leqq|r^n|$ で $\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=0$ とはさみうちの原理により

[6] $r=-1$ のとき　数列 $\{r^n\}$ は，-1，1，-1，…… となる。

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する。すなわち，極限はない。

[7] $r<-1$ のとき　$-r=s$ とおくと　$s>1$，$r^n=(-1)^ns^n$

[1] により，$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=\lim\limits_{n\to\infty}s^n=\infty$ で，数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互に変わる。

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動する。すなわち，極限はない。

□[3]，[4]，[5] より，$-1<r<1$ すなわち $|r|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ であるので

数列 $\{r^n\}$ の極限	$r>1$ のとき	$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$	正の無限大に発散する
	$r=1$ のとき	$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$	収束する
	$|r|<1$ （ $-1<r<1$ ）のとき	$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$	収束する
	$r\leqq-1$ のとき	振動する ……	極限はない

□[3]，[4]，[5]，[6] より，

> 数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は，$-1<r\leqq1$ である。

極限【無限等比数列】　p.31～34

例４） 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$(\sqrt{2})^n$　　(2)　$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　　(3)　$(-2)^n$

(解説)

(1)　数列 $\{(\sqrt{2})^n\}$ では $\sqrt{2}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n=\infty$

(2)　数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\dfrac{1}{2}\right|<1$（$-1<-\dfrac{1}{2}<1$）であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

(3)　数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2<-1$ であるから，極限はない。振動する。

例５） 数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

(解説)

数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は

$r=1$ または $|r|<1$ のときに限り収束するので

$$-1<\frac{x}{2}\leqq 1 \qquad \text{すなわち} \qquad -2<x\leqq 2$$

極限値は

$-1<\dfrac{x}{2}<1$　すなわち　$-2<x<2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=0$

$\dfrac{x}{2}=1$　すなわち　$x=2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=1$

例題２） 次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n-3^n}$　　(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{3^n+2^n}$

(解説)

(1)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=4$

分母と分子を分母の大きい方の項（4^n）で割る

$\dfrac{\infty}{\infty}$　$\dfrac{\infty}{\infty}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\infty$

分母と分子を分母の大きい方の項（3^n）で割る

極限【無限等比数列】　p.31～34

応用例題２） 数列 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1)　$|r|<1$　　　　$\dfrac{\infty}{\infty+\infty}$　　　　(2)　$r<-1$

（解説）

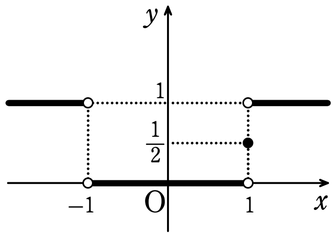
(1)　$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

(2)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{1}{0+1}=1$$



参考

$y=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$

$(x\neq-1)$ のグラフ

補足 $r>1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0 \text{ より}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1}$$

$$=\frac{1}{0+1}=1$$

$r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$r=-1$ だと n が奇数のとき分母を0とするから極限を考察しない

□漸化式で表された数列の極限

応用例題３） 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

（解説）

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-2=1-2=-1$ であるから

$$a_n-2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=2$

漸化式で表された数列の極限