極限【数列の極限と大小関係】 p.29～30

【内容目標】「追い越し禁止」と「はさみうちの原理」の考え方を理解しよう！

数列の極限の性質 (2)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。

5　**「追い出しの原理（追い越し禁止）」**

すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

補足　性質 5 において，常に $a_n<b_n$ でも，$\alpha=\beta$ の場合がある。たとえば，

$a_n=1-\dfrac{1}{n}$，$b_n=1+\dfrac{1}{n}$ では，$a_n<b_n$ であるが，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$ である。

また，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ のとき，すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$

6　**「はさみうちの原理」**　squeeze theorem, pinching theorem, sandwich theorem

すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $\alpha=\beta$ ならば　$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$

応用例題１＋α） 次の極限を求めよ。ただし，θ は定数とする。

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$　　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3}$　　(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}$

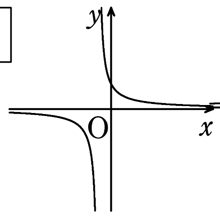
解説

(1)　$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ であるから　$\because\ 2n+1>0$

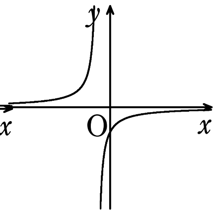
$$-\frac{1}{2n+1} \leqq \frac{(-1)^n}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2n+1}\right)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=0$$



$y=\dfrac{1}{2x+1}$



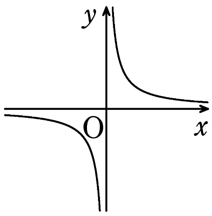
$y=-\dfrac{1}{2x+1}$

(2)　$-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ であるから

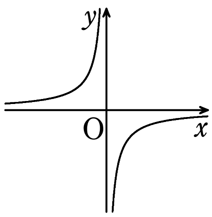
$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} \leqq \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}=0$$



$y=\dfrac{1}{x}$



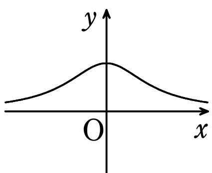
$y=-\dfrac{1}{x}$

(3)　$0 \leqq \cos^2 n\theta \leqq 1$ であるから　$\because\ n^2+1>0$

$$0 \leqq \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1} \leqq \frac{1}{n^2+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}=0$$



$y=\dfrac{1}{x^2+1}$