関数と極限【極限値と四則】　p.27～29

【内容目標】数列の収束・発散の考え方を理解しよう！

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が<u>**ともに収束するとき**</u>，次のことが成り立つ。

数列の極限の性質 (1)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。

1　$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　ただし，k は定数　　2　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

3　$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$　　4　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta\fallingdotseq 0$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ であるとき $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$ は明らかである。しかし，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ と $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ についてはいろいろな場合がある

（このようなものを**不定形**という）。よって極限が $\infty-\infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\times\infty$，$\dfrac{0}{0}$ などでは不定形でない

形に式変形する必要がある。なお，<u>∞同士や∞と他の数との演算は定義されていないので答案にこのような式を書くのは注意が必要である。</u>

■不定形を解消する方法

◇整式や分数式で表される数列なら…

$\infty-\infty$ となる場合　………　最高次の項でくくれ！

$\dfrac{\infty}{\infty}$ となる場合　………　分母の最高次の項で分母・分子を割れ！

◇無理式を含む数列なら…

$\dfrac{\infty}{\infty}$ となる場合　………　分母の最高次の項で分母・分子を割れ！

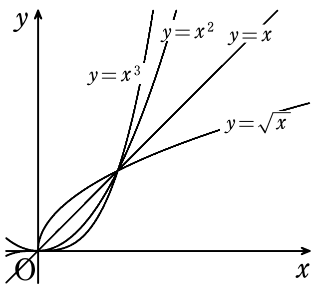
$\infty-\infty$ となる場合　………　$\sqrt{\bigcirc}-\sqrt{\triangle}$ の形に注目し，分子や分母を有理化せよ！

■∞に発散する速さの違いについて～知っていると答えの予想ができる

○一般に、正の無限大に発散する $n^{\bullet}$ は，次数●が大きいほど速く正の無限大に発散していく

○一般に　（n 次関数）＜＜（指数関数）＜＜（階乗関数）の速さになる

例）$\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$，n，n^2，n^3



$n-n^3\to-\infty$
遅　速

$\dfrac{2n^2-3n}{n^2+1}$ 同じ $\to 2$

と予想できる

例）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}$ や $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ などは「はさみうちの原理」を用いて解く必要があるが、

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=0$　（n ← 遅，3^n ← 速）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$　（2^n ← 遅，$n!$ ← 速）　と予想できる

$\boxed{\text{深める}}$ p を整数とするとき，数列 $\left\{\dfrac{n^3+2n}{n^p}\right\}$ の極限が p の値によってどのように変化するか

関数と極限【極限値と四則】　p.27～29

例２） $\lim_{n\to\infty} a_n=2$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot2+(-3)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}2=2-2=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+4}{a_n-3}=\frac{\lim_{n\to\infty}(b_n+4)}{\lim_{n\to\infty}(a_n-3)}=\frac{-3+4}{2-3}=-1$$

例）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)=\infty$　← $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\times\left(1-\frac{3}{n}\right)$ なので $\infty\times1$

$\boxed{\infty-\infty}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-4n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-4\right)=-\infty$　← $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^3\times\left(\frac{1}{n}-4\right)$ なので $\infty\times(-4)$

$\boxed{\infty-\infty}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$　← 分母が 0 以外の値に収束するように

分母と分子を分母の最高次 n で割る。

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=0$　← 分母と分子を分母の最高次 n^2 で割る。

例題１）　次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

$\boxed{\infty-\infty}$

解答　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$　**分子の有理化**

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}$$

← 分母と分子を

分母の最高次 n で割る。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{1+1}}$