極限【数列の極限】　p.24～26

【内容目標】数列の収束・発散の考え方を理解しよう！

数を一列に並べたものを数列といい，数列における各数を項という。数列の項は，最初の項を初項，n 番目の項を第 n 項という。以下では，項が限りなく続く **無限数列** を考える。

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に **収束** する，または $\{a_n\}$ の極限 は α であるという。また，値 α を $\{a_n\}$ の **極限値** ともいう。

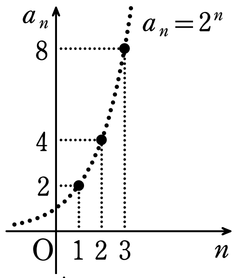
このことを，次のように書き表す*。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \alpha}$$

＊ 記号 ∞ は「無限大」と読む。∞ は，値すなわち数を表すものではない。（極限**値**と言わない）

□収束しない数列

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は **発散** するという。発散する数列には，次のように 3 つの場合がある。



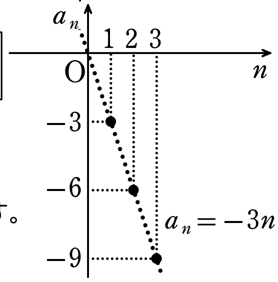
[1] 数列 2，4，8，……，2^n，……

では，n を限りなく大きくすると，2^n の値は，限りなく大きくなる。

[1] のような場合，数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散** する，

または $\{a_n\}$ の **極限は正の無限大** であるといい，次のように書き表す。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow \infty}$$



[2] 数列 -3，-6，-9，……，$-3n$，……

では，n を限りなく大きくすると，

$-3n$ の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなる。

限りなく小さくなるとは説明しない
（$a_n \longrightarrow 0$ と誤解されないため）

[2] のような場合，数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散** する，

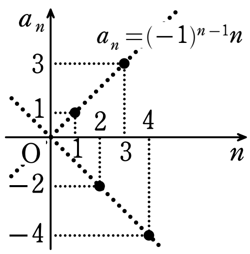
または $\{a_n\}$ の **極限は負の無限大** であるといい，次のように書き表す。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad \text{または} \quad n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow -\infty}$$

[1]，[2] の数列については，次のように書き表される。

$$\lim_{n\to\infty} 2^n=\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(-3n)=-\infty$$

注意 極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを数列の極限値とはいわない。



[3] 数列 1，-2，3，……，$(-1)^{n-1}n$，……

では，n を限りなく大きくすると，$(-1)^{n-1}n$ の値は収束しない。

発散する数列が，正の無限大に発散もせず，負の無限大に発散もしない場合，その数列は **振動** するという。

極限【数列の極限】　p.24～26

数列 $\{a_n\}$ の収束，発散についてまとめると，次のようになる。

○数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$	…… 極限は α
発散（収束しない）	正の無限大に発散	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$	…… 極限は ∞
	負の無限大に発散	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$	…… 極限は $-\infty$
	振動		…… 極限は ない

例１＋α）

(1) 数列 1.1，1.01，1.001，……，$1\boxed{+(0.1)^n}$，……　は，1 に収束する。（0に近づく）
　すなわち，この数列の極限値は 1 である。

(2) 数列 -0.1，0.01，-0.001，……，$\boxed{(-0.1)^n}$，……（0に近づく）
　は，各項の符号が負，正，負，…… と交互に変わりながら 0 に収束する。
　すなわち，この数列の極限値は 0 である。

(3) $\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，……，$\boxed{\dfrac{1}{n}}$ ……（0に近づく）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

(4) 1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{8}$，……，$\boxed{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$，……（0に近づく）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

(5) $\dfrac{1+1}{2}$，$\dfrac{2+1}{2}$，$\dfrac{3+1}{2}$，……，$\dfrac{n+1}{2}$，……（大きくなり続ける）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2}=\infty$

(6) -2^0，-2^1，-2^2，……，-2^{n-1}，……（負の方向に大きくなり続ける）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}(-2^{n-1})=-\infty$

(7) -5，-2，1，……，$3n-8$，……（+3されていく⇒大きくなり続ける）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}(3n-8)=\infty$
　正の無限大に発散する

(8) 1，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{3}$，……，$2-\boxed{\dfrac{1}{n}}$，……（引く値が 0 に近づく⇒2 に近づく）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2$

(9) -1，-4，-9，……，$-n^2$，……（負の方向に大きくなり続ける）
　なので　$\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$
　負の無限大に発散する

(10) -3，9，-27，……，$(-3)^n$，……
　なので　発散（振動）する

※ グラフをイメージすると良い
　⇒　関数の極限につながる