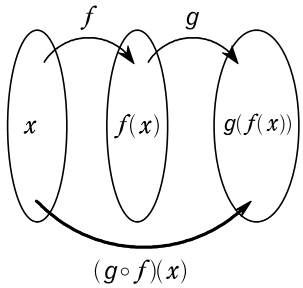
関数【合成関数】　p.20

【内容目標】合成関数の考え方を理解しよう！

一般に，2 つの関数 $y=f(x)$，$z=g(y)$ があり，$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとき，$g(y)$ に $y=f(x)$ を代入すると，新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる。



この関数を，$f(x)$ と $g(y)$ の **合成関数** という。

$g(f(x))$ を $(g\circ f)(x)$ とも書く。

右の図のような違いを確認しておこう

注意 一般に，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は同じ関数ではない。

($g\circ f=f\circ g$ が成り立つとは限らない)

例）　$f(x)=x+1$，$g(x)=2^x$ について，次の合成関数を求めよ。

(1)　$(g\circ f)(x)$

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\
&=g(x+1)\\
&=2^{x+1}
\end{aligned}
$$

(2)　$(f\circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\
&=f(2^x)\\
&=2^x+1
\end{aligned}
$$

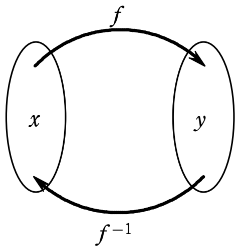
※ このように，一般に合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は一致しない。

□合成関数と逆関数

一般に，関数 $y=f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x))$ をもつとき次の式が成り立つ

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=y$$



例）　$f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ であるとき，

合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\
&=g(2^x)\\
&=\log_2 2^x\\
&=x\cdot\log_2 2\\
&=x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\
&=f(\log_2 x)\\
&=2^{\log_2 x}\\
&=x
\end{aligned}
$$

$y=2^{\log_2 x}$

両辺に底 2 の対数をとると

$\log_2 y=\log_2 2^{\log_2 x}$

$\log_2 y=\log_2 x\cdot\log_2 2$

$\log_2 y=\log_2 x$

$\therefore\ y=x=2^{\log_2 x}$

※ このように，逆関数の関係のとき

合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は一致する。