関数【逆関数】 p.16～19

【内容目標】逆関数を求められるようになろう！

一般に，関数 $y=f(x)$ が，増加関数または減少関数であるとき，値域内の y の値を定めると，それに対応して x の値が**ただ１つ**定まる。すなわち，x は y の関数である。この関数を $x=g(y)$ で表す。このとき，**変数 y とxを入れ替えて得られる関数 $y=g(x)$ を，もとの関数 $f(x)$ の 逆関数といい，$f^{-1}(x)$** （$f-$inverseと読む）**で表す。**

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れかわる。

逆関数を求めるための一般的な手順は，次のようになる。

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方 1　$y=f(x)$ を x について解き，$x=g(y)$ の形にする。 2　x と y を入れかえて，$y=g(x)$ とする。 もとの関数 $f(x)$と 逆関数 $g(x)$ では，定義域と値域も入れ替わる。（文字を変える）

また，一般に次のことが成り立つ。

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは， 直線 **$y=x$ に関して対称**である。

例題３＋α） 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y=5x-4$

$-5x=-y-4$

$x=\dfrac{1}{5}y+\dfrac{4}{5}$

x と y を入れ替えると

$y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$

(2)　$y=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$

定義域 $x\neq 2$　値域 $y\neq 1$

$(x-2)y=x+1$　より　$yx-2y=x+1$

$yx-x=2y+1$　　$(y-1)x=2y+1$

$y\neq 1$ なので　$x=\dfrac{2y+1}{y-1}$

x と y を入れ替えると　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

（定義域 $x\neq 1$　値域 $y\neq 2$ ）

例２） 関数 $y=\sqrt{x}$ の逆関数を求めよ。

定義域　$x\geqq 0$　値域　$y\geqq 0$

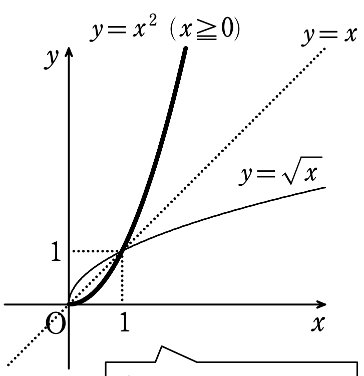
$y=\sqrt{x}$ を x について解く（両辺2乗）

$x=y^2$　$(y\geqq 0)$

x と y を入れかえて

$y=x^2$　$(x\geqq 0)$

これが $y=\sqrt{x}$ の逆関数である。



グラフがイメージできるとよい

<注意>　関数 $y=\sqrt{x}$ では，定義域 $x\geqq 0$ の表示は省略することが多い。

関数【逆関数】　p.16～19

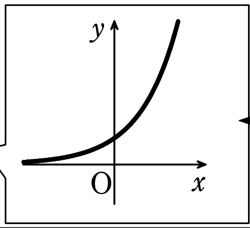
例３） 関数 $y=2^x$ の逆関数を求めよ。

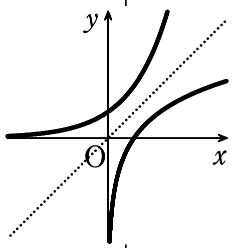
定義域　実数全体

値域　$y>0$（正の実数全体）

これを x について解くと

$x=\log_2 y$





底^{指数}＝真数 ⇔ 指数＝$\log_{底}$真数

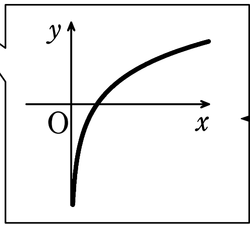
ただし 底>0，底$\fallingdotseq 1$，真数>0

x と y を入れ替えると

$y=\log_2 x$

定義域　$x>0$（正の実数全体）

値域　実数全体



<注意>　関数 $y=\log_2 x\ (x>0)$ では，定義域の表示を省略して $y=\log_2 x$ と書くことが多い。

グラフがイメージできるとよい

補題　関数が逆関数をもたない場合もある。

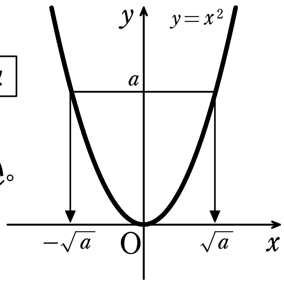
例５） 関数 $y=x^2$ の逆関数

関数なので１対１対応がとれていないとダメ

$y=x^2$ を x について解くと　$x=\pm\sqrt{y}$

この場合，y の値を定めても x の値は**ただ１つには定まらない**。

よって，関数 $y=x^2$ は逆関数をもたない。　終



注意　定義域を制限した関数 $y=x^2\ (x\geqq 0)$ は逆関数をもつ。

その逆関数は $y=\sqrt{x}$ である。

□逆関数の性質

逆関数の定義から，次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

関数 $y=f(x)$ において、y の値 b に対する x の値 a を求める式が $a=f^{-1}(b)$ であるということ。逆関数をもてば、そのような a はただ１つ定まる

例５）　関数 $f(x)$ が逆関数をもち，$f(4)=2$ であるとき　$f^{-1}(2)=4$　終

練習１３） $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2)=4$，$f^{-1}(1)=-4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答

$f(2)=4$ であるから　$2a+b=4$ ……①

$f^{-1}(1)=-4$ のとき $f(-4)=1$ であるから　（逆関数の性質）

$-4a+b=1$ ……②

①，② を解いて

$$\begin{array}{rr} & 2a+b=4 \\ -) & -4a+b=1 \\ \hline & 6a\quad =3 \end{array}$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$

これは，$a\fallingdotseq 0$ を満たす。