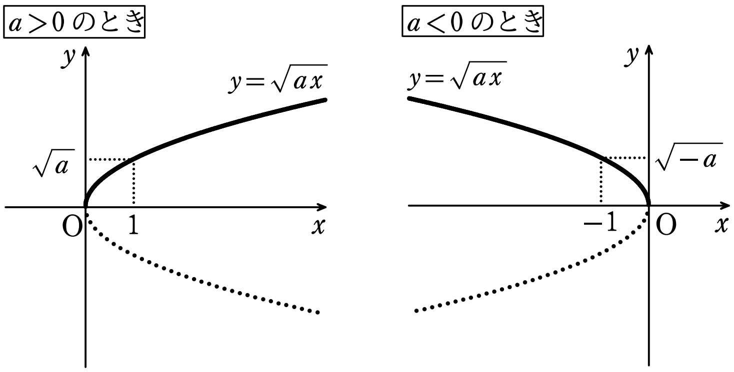
関数【無理関数とそのグラフ】 p.12～14

【内容目標】無理関数の特徴を理解してグラフをかけるようになろう！

$\sqrt{x}$，$\sqrt{3x+1}$ のように，根号の中に文字を含む式を **無理式** といい，x についての無理式で表された関数を，x の **無理関数** という。
特に断りがない場合，無理関数の定義域は，根号の中を正または0にする実数全体である。

一般に，無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフは，下の図のようになる。



$y=\sqrt{ax}$ を2乗すると
$y^2=ax$ つまり
$x=\dfrac{1}{a}y^2$ となる
これは x(軸)と y(軸)が
逆になった曲線となる

無理関数 $y=\sqrt{ax}$ については，次のことがいえる。

$a>0$ のとき		$a<0$ のとき	
定義域は	$x\geqq 0$	定義域は	$x\leqq 0$
値域は	$y\geqq 0$	値域は	$y\geqq 0$
単調に増加する(*)		単調に減少する(*)	

定義域は
(ルートの中身)$\geqq 0$

$\sqrt{○}\geqq 0$ であるから
$y=\sqrt{○}$ より
$y\geqq 0$である。

一般に，$a\neq 0$ のとき $\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$ であるから，
$y=\sqrt{ax+b}$ は $y=\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形できる。
一般に，無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$ について，次のことが成り立つ。

数学Ⅲ
無理関数

無理関数のグラフと性質

1 無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものである。
2 $a>0$ のとき，定義域は $x\geqq p$，値域は $y\geqq 0$ であり，
$a<0$ のとき，定義域は $x\leqq p$，値域は $y\geqq 0$ である。

代数関数：ある多項式方程式
$a_n(x)y^n+a_{n-1}(x)y^{n-1}+\cdots\cdots+a_0(x)y^0=0$
を満たす関数 $y=f(x)$ のこと

補足

有理関数 $\begin{cases}\text{有理整関数：}x\text{の多項式で表される関数}\\ \text{分数関数：}x\text{の分数式で表される関数}\end{cases}$

代数関数のうち、有理関数でないものを無理関数という

代数関数でない関数を総称して超越関数という
(三角関数や指数関数、対数関数など)

関数【無理関数の応用（グラフと不等式）】　p.15

【内容目標】グラフを活用して方程式・不等式を解こう

応用例題２） 関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

方針 … $\sqrt{x+2}=x$ の両辺を 2 乗した方程式の解は，もとの方程式の解とは限らない。

得られた x の値がもとの方程式を満たすかどうかを調べて，解を決定する。

共有点の x 座標は連立方程式の解と一致する

解答　$\sqrt{x+2}=x$　…… ①

の両辺を 2 乗して整理すると

$x^2-x-2=0$

これを解くと　$x=-1,\ 2$

このうち，① を満たすのは $x=2$ で，

このとき ① の両辺の値は 2 である。

よって，求める共有点の座標は

$(2,\ 2)$

$A=B \Longrightarrow A^2=B^2$

は成り立つが

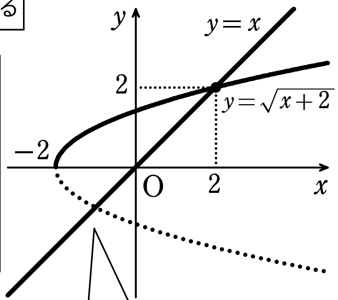
$A^2=B^2 \Longrightarrow A=B$

は成り立たないため

確認が必要となる

別解　$y=\sqrt{x+2}\geqq 0$ なので

①より $x=y\geqq 0$　ゆえに $x=2$ である



$x=-1$ は 無縁根 と

呼ばれる

応用例題２つづき） 不等式 $\sqrt{x+2}>x$　…… ②　を解け。

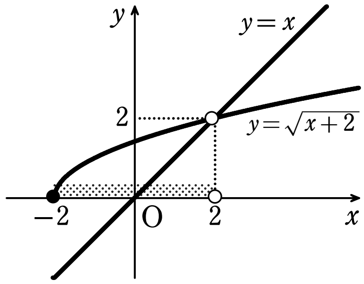
不等式　$\sqrt{x+2}>x$　の解は，

関数 $y=\sqrt{x+2}$ のグラフが直線 $y=x$ より上側に

ある x の値の範囲である。

右の図から，不等式 ② の解は

$-2\leqq x<2$



別解

$y=\sqrt{x+2}$　……①，　$y=x$　……②

とすると①は 定義域　$x+2\geqq 0$ より $x\geqq -2$

無理関数のときは

グラフを使わないと

ちょっと面倒かも…

ⅰ） $x<0$ のとき

$\sqrt{x+2}\geqq 0$ であるから

$x<0\leqq\sqrt{x+2}$ となり

与えられた不等式を満たす

∴　$-2\leqq x<0$

ⅱ） $x\geqq 0$ のとき

$\sqrt{x+2}>x$ の両辺は正になる

よって両辺を 2 乗しても

大小関係は変わらないので

$x+2>x^2$

$x^2-x-2<0$

$(x-2)(x+1)<0$

∴　$-1<x<2$

条件より $x\geqq 0$ であるから

$0\leqq x<2$

ⅰ）ⅱ）より　$-2\leqq x<2$