微分法の応用【近似式】　p.131～132

□近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

で定義される。よって，h が 0 に十分近い値のとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$$

であると考えてよい。

両辺に h をかけて　$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq f'(a)\times h$

$$\therefore\quad f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

これは，h が 0 に十分近い値のとき，$f(a+h)$ の値を h の 1 次式で近似する式となっている。

１次の近似式

h が 0 に十分近いとき

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

補足　平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ を $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$

$\therefore$　$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$の形に表したときに

$\theta h=0$ とする代わりに，等号を≒にした式

補足　$x=a+h$ とおくと　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ であり

$x\fallingdotseq a$ のとき　$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$

上の近似式の意味を，グラフで考えてみよう。

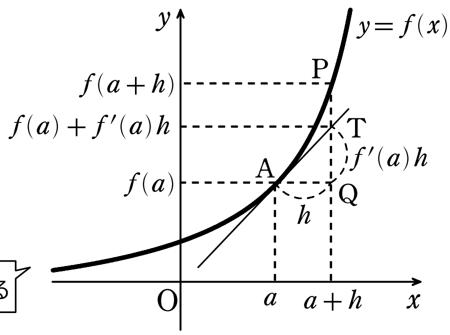
曲線 $y=f(x)$ 上の点 A$(a,\ f(a))$における接線の方程式は　$y=f(a)+f'(a)(x-a)$　と表される。

よって，$h\fallingdotseq 0$ のとき，右の図において，

点 P の y 座標を点 T の y 座標で近似する

ということである。

「１次式＝直線」で近似する



例６） $h\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式を作る。

解答　$(\sin x)'=\cos x$ であるから，

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$\sin(a+h)\fallingdotseq \sin a+\cos a\cdot h$

$$\therefore\quad \sin(a+h)\fallingdotseq \sin a+h\cos a$$

微分法の応用【近似式】　p.131～132

「１次の近似式」で，とくに $a=0$ のときを考え，h を x におき換えると，次の近似式が得られる。

$x \fallingdotseq 0$ のときの１次の近似式

x が０に十分近いとき

$x \fallingdotseq 0$ のとき　$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$ の近似式の場合は

$a=0$ とすると求められる

例題１２）　p を有理数とするとき，近似式「 $x \fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$」 を導け。

また，この近似式を用いて，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を求めよ。

解答　$f(x)=(1+x)^p$ について　$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$

よって　$f(0)=1$，$f'(0)=p$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

また，$\sqrt[3]{1.006}=(1+0.006)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$\sqrt[3]{1.006} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}\times 0.006=1.002$

$x=0.006$　$p=\dfrac{1}{3}$

$(1.002)^3=1.006012008$ であるから

ほとんど誤差がないことが分かる

ほかの例　$(1+0.002)^{10} \fallingdotseq 1+10\times 0.002=1.02$

$$\frac{1}{(1.002)^{10}}=(1.002)^{-10} \fallingdotseq 1+(-10)\times(0.002)=0.98$$

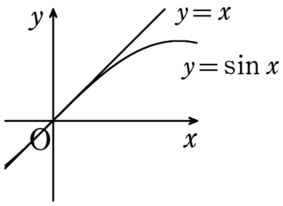
例）$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$x \fallingdotseq 0$ のとき

$\sin x \fallingdotseq \sin 0+(\cos 0)\cdot x$

すなわち　$\sin x \fallingdotseq x$

$y=\sin x$ と $y=x$ は

０の近くでは似た形



補足　２次の近似式は

$x \fallingdotseq a$ のとき　$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

これは，曲線の非常に狭い部分を放物線で近似する式である

これにより，１次の近似式の誤差 E について，次のことが成り立つ

$|E| \fallingdotseq \dfrac{1}{2}|f''(0)|x^2$