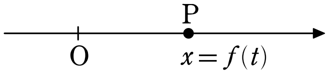
微分法の応用【速度・加速度】　p.127～130

【内容目標】微分をいろいろなことに活用してみよう

□直線上の点の運動

数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として

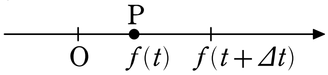


$x=f(t)$

等速直線運動であれば $x=at+b$ となるが
速度が一定とは限らない一般の運動では $x=f(t)$ としておく

と表されるとする。このとき，時刻 t から $t+\Delta t$ までの 平均速度 は，

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{(t+\Delta t)-t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$



で表される。この平均速度において，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限値を，時刻 t における点 P の **速度** という。速度を v で表すと

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

向きと大きさを持つ → 速度はベクトル量

である。P は，$v>0$ のとき数直線上を正の向きに動き，$v<0$ のとき負の向きに動く。

また，v の絶対値 $|v|$ を，点 P の **速さ** という。

ベクトルの大きさが速さ

さらに，速度 v の時刻 t における変化率を，点 P の **加速度** という。加速度を α で表すと，次のようになる。

単位時間あたりの速度の変化のこと
常に加速度が 0 なら等速運動

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

以上のことをまとめると，次のようになる。

速度と加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x=f(t)$
で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α は

$v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$，　１回微分したら『速度』　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$　２回微分したら『加速度』

例題１０）　数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として，
$x=2\sin(\pi t-b)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，
加速度 α を求めよ。ただし，b は定数とする。

一般に $x=A\sin(\omega t+\alpha)$ の形で表される点Pの運動を**単振動**といい、A を**振幅**、ω を**角振動数**という

解答　速度 v は　$v=\dfrac{dx}{dt}=2\pi\cos(\pi t-b)$

加速度 α は　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-2\pi^2\sin(\pi t-b)$

補足　例の点 P の運動を**単振動**（等速円運動を真横から見た運動）という。α は $\alpha=-\pi^2x$ とも表される。

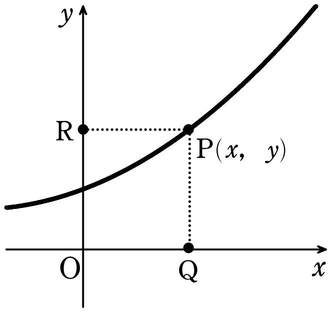
$a\sin\omega t+b\cos\omega t=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t+\alpha)$　ただし　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

が成り立つ。これを **単振動の合成** という。例題１０の x は微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ の解である。

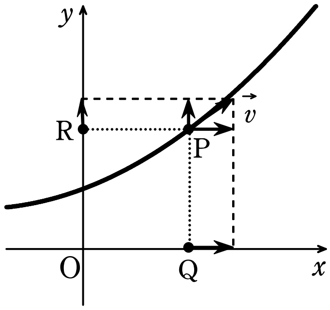
この方程式を単振動の方程式ということがある。なおこの一般解が　$x=a\sin\omega t+b\cos\omega t$　である。

微分法の応用【速度・加速度】　p.127～130

□平面上の点の運動



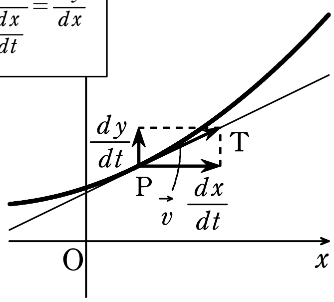
　時刻 t における点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は t の関数となる。このとき，P から x 軸，y 軸に下ろした垂線を，それぞれ PQ，PR とすると，点 Q は x 軸上を，点 R は y 軸上を動く。したがって，時刻 t における点 Q の速度は $\dfrac{dx}{dt}$，点 R の速度は $\dfrac{dy}{dt}$ である。



これらを，それぞれ点 P の x 軸方向の速度，y 軸方向の速度といい，これらを成分とするベクトル $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を，時刻 t における点 P の **速度** という。

　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，P の速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を，右の図のように $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ とすると，直線 PT の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ である。

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}$$



　よって，直線 PT は，P の描く曲線の P における接線である。

　速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を，点 P の **速さ** という。

　さらに，x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を，時刻 t における点 P の 加速度 という。

また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を，点 P の **加速度の大きさ** という。

　これまでのことをまとめると，次のようになる。

速度と加速度

　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，時刻 t における P の速度 $\vec{v}$，速さ $|\vec{v}|$，加速度 $\vec{\alpha}$，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\qquad |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right),\qquad |\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

微分法の応用【速度・加速度】 p.127～130

補足　速度 $\vec{v}$ や加速度 $\vec{\alpha}$ は，厳密にはベクトルの微分で導かれる。

$\vec{p}(t)=(x(t),\ y(t))$ の極限を，$\displaystyle\lim_{t\to\alpha}\vec{p}(t)=\left(\lim_{t\to\alpha}x(t),\ \lim_{t\to\alpha}y(t)\right)$ のように定義すると

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{p}(t)=\lim_{t\to\alpha}\frac{\vec{p}(t+\varDelta t)-\vec{p}(t)}{\varDelta t}$$

$$=\left(\lim_{t\to\alpha}\frac{x(t+\varDelta t)-x(t)}{\varDelta t},\ \lim_{t\to\alpha}\frac{y(t+\varDelta t)-y(t)}{\varDelta t}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

$\vec{\alpha}=\dfrac{d\vec{\alpha}}{dt}$ も同様に処理できる

例題１１）　座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$x=r\cos\omega t$，$y=r\sin\omega t$　　(r，ω は正の定数)

で表されるとき，時刻 t における P の速さ，加速度の大きさを求めよ。

解答　時刻 t における P の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t$，　$\dfrac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t$

よって，速さ $|\vec{v}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\cos\omega t)^2}$$

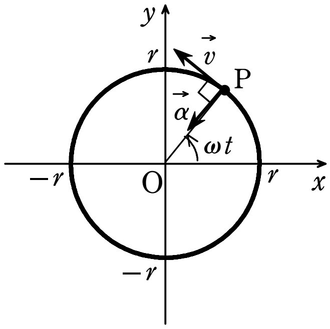
$$=\sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=r\omega$$

$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t$，　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t$

よって，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2+(-r\omega^2\sin\omega t)^2}$$

$$=\sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=r\omega^2$$



例題１１の点 P は円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を動く。この円運動の速さは $r\omega$ であるから一定である。このように，速さが一定の円運動を **等速円運動** という。

また，例題１１では $\vec{\alpha}=-\omega^2(x,\ y)$ と表される。
一般に，等速円運動する点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，P から円の中心に向かう向きであり，$\vec{\alpha}$ は速度 $\vec{v}$ に垂直である。

深める　$\vec{v}-(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t)$，$\vec{\alpha}=(-r\omega^2\cos\omega t,\ -r\omega^2\sin\omega t)$ である。

ここで，$\vec{\alpha}=-\omega^2(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)=-\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\omega^2\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と表されるから

加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，P から円の中心に向かう向きである

また，$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=(-r\omega\sin\omega t)\times(-r\omega^2\cos\omega t)+r\omega\cos\omega t\times(-r\omega^2\sin\omega t)$

$=r^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t-r^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t=0$

$\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ はともに $\vec{0}$ でないから　$\vec{\alpha}\perp\vec{v}$