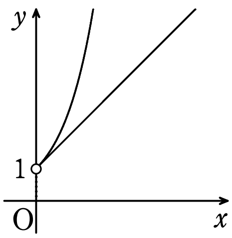
微分法の応用【方程式・不等式への応用】　p.125～126

【内容目標】微分法を用いて不等式を証明したり方程式の個数を調べよう

□不等式の証明　数Ⅱと同様

応用例題４）　$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$e^x>1+x$$



証明　$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと　$f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$f(0)=0$ から，$x>0$ のとき　$f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　$e^x>1+x$　終

注意　$x>0$ のとき，練習１８ (2) の不等式 $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ から $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2>\frac{x^2}{2}$

なので次の不等式が成り立つ。

$$e^x>\frac{x^2}{2}\quad \text{すなわち}\quad \frac{e^x}{x}>\frac{x}{2},\quad \frac{x}{e^x}<\frac{2}{x}$$

ここで，$x\longrightarrow\infty$ のとき，$\frac{x}{2}\longrightarrow\infty$，$\frac{2}{x}\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

よって一般に，任意の自然数 n に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

e^x の方が大きくなるスピードが速い

となることが知られている。これは $y=e^x$ が $x\longrightarrow\infty$ のとき $y=x^n$ と比較して，より急速に増大することを意味している。

このことを用いると…

$$\log x-x=\log x-x\log e$$
$$=\log x-\log e^x$$
$$=\log\frac{x}{e^x}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

であるから $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ により $\lim_{x\to\infty}(\log x-x)=\lim_{x\to\infty}\log\boxed{\frac{x}{e^x}}=-\infty$

と活用できる

微分法の応用【方程式·不等式への応用】 p.125～126

□方程式の実数解の個数

数Ⅱと同様

応用例題５） a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$\frac{e^x}{x}=a$$

考え方　$y=\dfrac{e^x}{x}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べる。

前ページで示した $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いて，グラフの漸近線も調べる。

凹凸（変曲点）まではいらないが
漸近線は大事

方程式の
実数解の個数

a を分離させる

解答　$\dfrac{e^x}{x}=a$ より

$y=\dfrac{e^x}{x}$ と $y=a$ の交点の個数の話に持っていく

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$ となる x は

$x=1$ であるから，

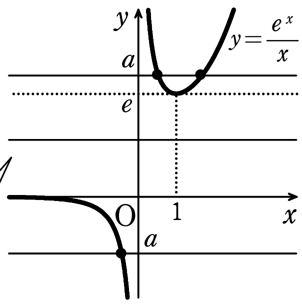
$f(x)$ の増減表は上のようになる。また

x	……	0	……	1	……
e^x	$+$	1	$+$	e	$+$
$x-1$	$-$	-1	$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$	1	$+$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	極小 e	↗

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点を考えて，求める実数解の個数は，次のようになる。



$y=a$ (横線)を動かして共有点の個数を考える

$a>e$ のとき　2個
$a=e$，$a<0$ のとき　1個
$0\leqq a<e$ のとき　0個

微分法の応用【 e^x を表す式】 p.138

コラム

e^x を表す式

125 ページの問題について，先生と A さんが話しています。

A ：応用例題 4 と練習 18 (2) で証明した不等式は形が似ています。そして練習 18 (2) の不等式の証明には，

応用例題 4 で証明した不等式を利用することができました。何か関係があるのでしょうか。

先生：実は，e^x は次のような無限級数で表されることが知られています。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\cdots \quad ①$$

①の式を e^x のマクローリン展開という（テイラー展開で $a=0$ としたもの）

どちらの不等式もこの事実が背景にある不等式だといえますね。

A ：① より，$x>0$ のとき

$$e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n \quad ②$$

が成り立つわけですね。

②の式で $n=10$ として計算すると

右辺は $\frac{98641}{36288}=2.7182815255\cdots$

となり小数第６位まで一致する

先生：ちなみに，② の不等式の右辺を $g_n(x)$ とすると，

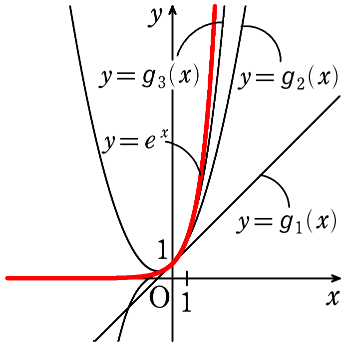
$y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$，$y=g_3(x)$ と $y=e^x$ のグラフは

右の図のようになります。

$x>0$ では，n が大きくなるにつれて，

$y=g_n(x)$ のグラフが $y=e^x$ のグラフに近づいていくことが

わかりますね。



練習） $x>0$ のとき，② の不等式を数学的帰納法を用いて証明しよう。

また，② の不等式を用いて $e>2.7$ であること確かめよう。

解答 【②の不等式の証明】

[1] $n=1$ のとき

$f(x)=e^x-(1+x)$ とすると $f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから $f'(x)>0$

よって $f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき $e^x>1+x$

よって $n=1$ のとき②が成り立つ

[2] $n=k$ のとき

②が成り立つ，すなわち

$$e^x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}x^k\right)>0$$

が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときの②の両辺の差を $f(x)$ とすると

$$f(x)=e^x-\left\{1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}\right\}$$

$$f'(x)=e^x-\left\{0+1+\frac{2}{2!}x+\frac{3}{3!}x^2+\cdots\cdots+\frac{k+1}{(k+1)!}x^k\right\}$$

$$=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{k!}x^k\right)>0$$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する

ゆえに，$x>0$ のとき　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$n=k+1$ のときも②が成り立つ

[1], [2] から，すべての自然数 n について②が成り立つ。

【 $e>2.7$ であること】

② において，$n=4$ とすると　$e^x>1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4$

この不等式に $x=1$ を代入して　$e>1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{65}{24}>2.7$