# 微分法の応用【第２次導関数と極値】　p.122～123

**【内容目標】第２次導関数を調べて極値を考えてみよう！**

## □第２次導関数と極値

　関数 $f(x)$ の極値を判定するのに，第 2 次導関数 $f''(x)$ を利用する方法がある。$f''(x)$ が連続関数であるとき，次のことが成り立つ。

あくまで補完的な判定法

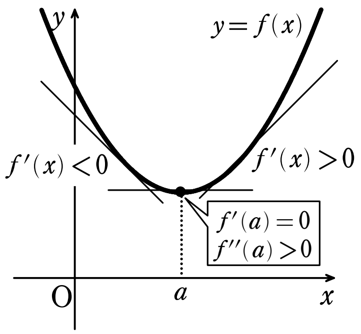
> **第２次導関数と極値**
>
> 1　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば，$f(a)$ は極小値である。
>
> 2　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば，$f(a)$ は極大値である。

【１の証明】$f''(a)>0$ のとき，$a$ に十分近い $x$ では $f''(x)>0$ となり，$f'(x)$ は増加する。

　ここで，$f'(a)=0$ であるから

　　$x<a$ では $f'(x)<0$，　$x>a$ では $f'(x)>0$

| $x$ | …… | $a$ | …… |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 極小 | ↗ |



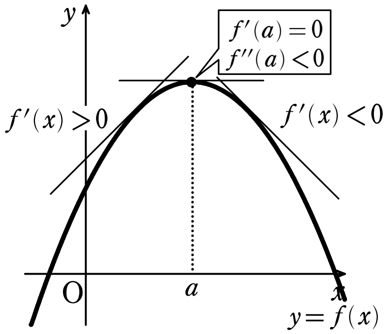

　よって，このとき $f(a)$ は極小値である。　㊢

【２の証明】$f''(a)<0$ のとき，$a$ に十分近い $x$ では $f''(x)<0$ となり，$f'(x)$ は減少する。

　ここで，$f'(a)=0$ であるから

　　$x<a$ では $f'(x)>0$，　$x>a$ では $f'(x)<0$

| $x$ | …… | $a$ | …… |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ |




　よって，このとき $f(a)$ は極大値である。　㊢

別解 関数 $f(x)$ について

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

$a<c<x$ を満たす $c$ が存在する。$f'(a)=0$ のとき

$$f(x)-f(a)=\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

$f''(x)$ は $x=a$ で連続であるから，$x$ が $a$ に十分近い値のとき $f''(c)$ は $f''(a)$ と同符号である。したがって

$f'(a)=0,\ f''(a)>0 \Longrightarrow f(x)>f(a)$

$f'(a)=0,\ f''(a)<0 \Longrightarrow f(x)<f(a)$

補足 テイラーの公式

閉区間 $[a,\ x]$ で $n$ 回微分可能な関数 $f(x)$ について

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k\,!}}_{(n-1)\text{ 次の多項式}}+\underbrace{f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n\,!}}_{\text{誤差}}$$

を満たす $c$　（$a<c<x$）が存在する

※関数 $f(x)$ を $x=a$ の近くで多項式に近似することができる

# 微分法の応用【第２次導関数と極値】　p.122～123

**例４）**　関数 $f(x)=-x^3+3x$ の極値

$f'(x)=-3x^2+3$，$f''(x)=-6x$

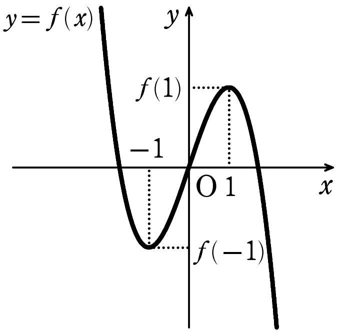
$f'(x)=0$ とすると

$x=-1$，$1$

$f''(-1)=6>0$，$f''(1)=-6<0$

であるから

$f(-1)$ が極小値，$f(1)$ が極大値　終




**例題９）**　次の関数の極値を，第２次導関数を利用して求めよ。

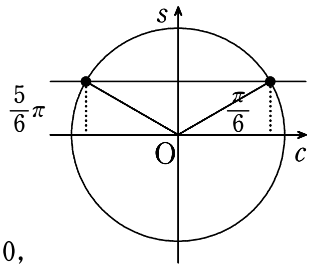
$$f(x)=x+2\cos x \quad (0\leqq x\leqq\pi)$$

解答　$f'(x)=1-2\sin x$，$f''(x)=-2\cos x$

$0<x<\pi$ において，$f'(x)=0$ となる $x$ の値は

$$1-2\sin x=0 \quad より \quad \sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$




ここで　$f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\cos\dfrac{\pi}{6}=-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0$，

$$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-2\cos\frac{5}{6}\pi=-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}>0$$

よって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{6}$ で極大値 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

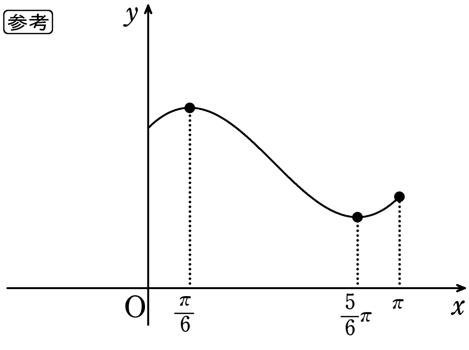
$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で極小値 $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$ をとる。

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi+2\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$$

※ 増減表をかかなくても判断ができるということ

（符号の変化を調べるのが大変なときなどに用いられることがある）

参考




| $x$ | $0$ | …… | $\frac{\pi}{6}$ | …… | $\frac{5}{6}\pi$ | …… | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | | $-$ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ | $\pi-2$ |

## 微分法の応用【第２次導関数と極値】 p.122～123

【注意】 $f''(a)=0$ のときは，$f(a)$ が極値である場合も，極値でない場合もある。

**例５）** (1) 関数 $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$，$f''(x)=12x^2$

$f'(0)=0$，$f''(0)=0$

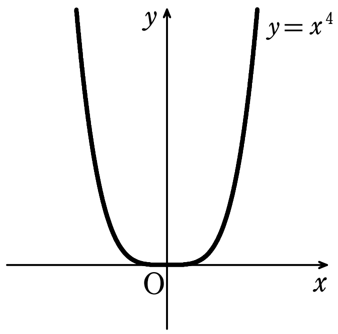
$f(0)$ は極小値である。

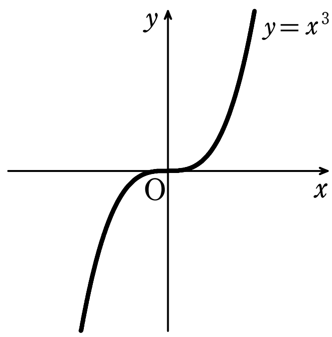
(2) 関数 $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$

$f'(0)=0$，$f''(0)=0$

$f(0)$ は極値ではない。




終

※ $f'(a)=f''(a)=0$ のときは，極値に関していろいろな場合がある

補足 $f(x)$ が $x=a$ の近傍で $n$ 回微分可能で，

$f^{(n)}(x)$ が $x=a$ で連続であるとする。

$f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ ,

$f^{(n)}(a)\neq 0$ であるとき

$n$ が偶数で $f^{(n)}(a)>0$ ならば， $f(a)$ は極小値

$n$ が偶数で $f^{(n)}(a)<0$ ならば， $f(a)$ は極大値

$n$ が奇数ならば， $f(a)$ は極値ではない