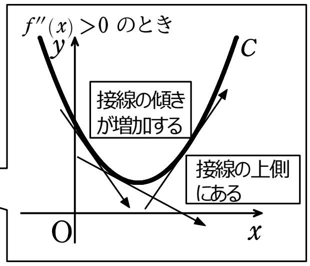
微分法の応用【関数のグラフ】　p.115～121

【内容目標】変曲点を調べてより正確なグラフをかいてみよう！

□曲線の凹凸

関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする。$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は，$f''(x)$ の符号で調べることができる。また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す。

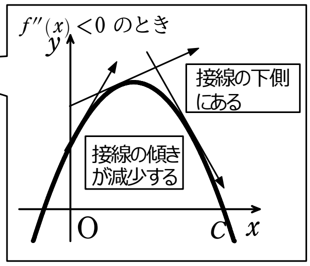
よって，次のことがいえる。



$f''(x)>0$ である区間では，**$f'(x)$ の値は増加**する。

すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する。

⇒ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で **下に凸** である



$f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する。

すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する。

⇒ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で **上に凸** である

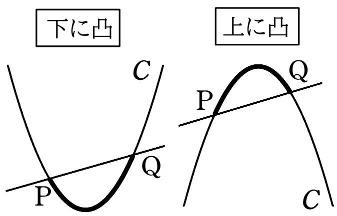
上で調べたことをまとめると，次のことがいえる。

> **$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸**
>
> 関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき
>
> 1　$f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は**下に凸**である。
>
> 2　$f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は**上に凸**である。

曲線の接線の傾きの変化

	下に凸	上に凸
$f'(x)$	$f'(x)$ の値が増加	$f'(x)$ の値が減少
$f''(x)$	$f''(x)>0$	$f''(x)<0$
曲線 C	接点を除いて接線の上側	接点を除いて接線の下側

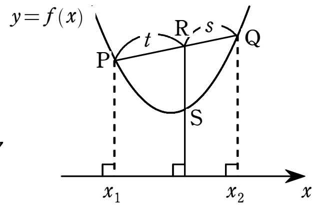
＜補足＞　曲線 C がある区間で下に凸であるとき，その区間にある C 上のどの 2 点 P，Q に対しても，弧 PQ は線分 PQ の下側にある。また，上に凸であるとき，弧 PQ は線分 PQ の上側にある。



曲線 $y=f(x)$ が区間 I で下に凸とは，区間 I の任意の 2 数 x_1，x_2 に対する曲線上の 2 点P, Qをとるとき，線分 PQ が曲線より上にあることである。

⇒$s+t=1$，$s>0$，$t>0$である任意の実数 s，t に対して

不等式 $f(sx_1+tx_2)<sf(x_1)+tf(x_2)$ が常に成り立つことであるとも言える。（SとR の上下関係を示した式）



□変曲点

例３）　曲線 $y=x^3-3x^2+4$ の凹凸

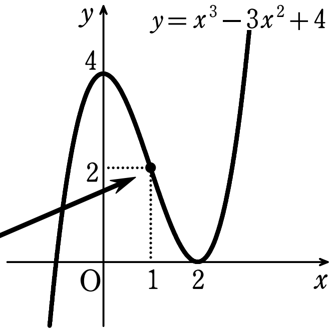
$y'=3x^2-6x$

$y''=6x-6=6(x-1)$ → $y''=0$ とすると $x=1$

y'' の符号を調べて，この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸

終



点 (1，2) を境目として曲線の凹凸が入れかわる。このように，曲線の凹凸が入れかわる境目の点を **変曲点** という。

> **曲線 $y=f(x)$ の変曲点**
>
> $f''(a)=0$ のとき，**$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば**，
>
> 点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の**変曲点**である。

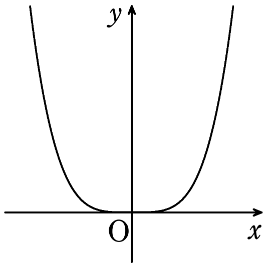
点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば $f''(a)=0$ である。しかし，$f''(a)=0$ であっても点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるとは限らない（なるときもならないときもある）。

たとえば，関数 $f(x)=x^4$ を考える。

$f'(x)=4x^3$，$f''(x)=12x^2$

より，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は，右の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	0	下に凸



よって，$f''(0)=0$ であっても，原点 (0，0) はこの曲線の変曲点ではない。

（ $f''(a)=0$ は点 $(a,\ f(a))$ が変曲点であるための必要条件である）

練習１４） 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

(1)　$y=x^4+2x^3+1$　　(2)　$y=xe^{-x}$

(3)　$y=x-\cos x$　$(0<x<\pi)$　　(4)　$y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

解答

(1)　$y'=4x^3+6x^2$，

$y''=12x^2+12x=12x(x+1)$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-1	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点 0	上に凸	変曲点 1	下に凸

変曲点の座標は　$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

> 変曲点を調べるだけなので $f'(x)$ は省略している

(2)　$y'=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	変曲点 $\dfrac{2}{e^2}$	下に凸

変曲点の座標は　$\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

微分法の応用【関数のグラフ】 p.115～121

(3) $y'=1+\sin x$, $y''=\cos x$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	0	……	$\frac{\pi}{2}$	……	π
y''	／	$+$	0	$-$	／
y	／	下に凸	変曲点 $\frac{\pi}{2}$	上に凸	／

変曲点の座標は $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $y'=-4x^3+12x^2-12x+4$,

$$y''=-12x^2+24x-12$$
$$=-12(x^2-2x+1)$$
$$=-12(x-1)^2$$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	……	1	……
y''	$-$	0	$-$
y	上に凸	1	上に凸

変曲点はない。

例題７） 関数 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，**グラフの概形をかけ。**

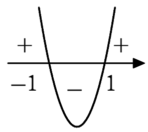
解答 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする。

$$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

-1 は負，$e^{-\frac{x^2}{2}}$ は正⇒ x で正負が決まる（正負は逆）

$$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-x\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$
$$=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ は正⇒ x^2-1 で正負が決まる



$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	……	-1	……	0	……	1	……
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤵

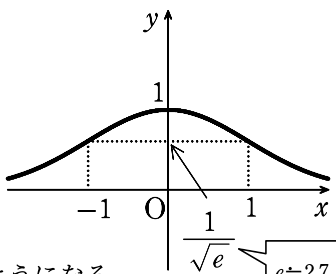
$f'+\ f''+ \Rightarrow$ ⤴,
$f'+\ f''- \Rightarrow$ ↗,
$f'-\ f''- \Rightarrow$ ↘,
$f'-\ f''+ \Rightarrow$ ⤵

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

補足
⤴ は下に凸で増加，
↗ は上に凸で増加，
↘ は上に凸で減少，
⤵ は下に凸で減少
であることを示している。

また
$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。



$e≒2.7$ より $\frac{1}{\sqrt{e}}≒0.6$

以上から，グラフの概形は，図のようになる。

注意 関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ は $f(-x)=f(x)$ を満たすから，例題７のグラフは y 軸に関して対称である。グラフの概形をかくときは，グラフの対称性にも注意するとよい。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.115～121

例題８）　関数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ。

漸近線は　$x=1$ ，$y=x+1$

解答　関数の定義域は $x-1\neq 0$ より　$x\neq 1$ である。

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ とすると，$f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}=x+1+(x-1)^{-1}$ であるから

$$f'(x)=1-(x-1)^{-2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

$(x-1)^2$ は正
$\Rightarrow x(x-2)$ で正負が決まる

$$f''(x)=2(x-1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$(x-1)^3$ で正負が決まる

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	……	0	……	1	……	2	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘		↘	極小 4	↗

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty$　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\infty$　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

また　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty$

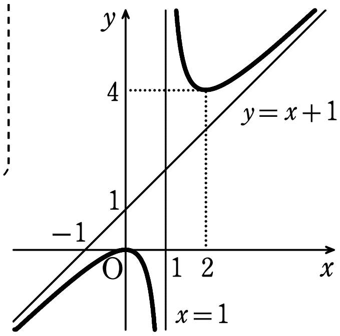
であるから，直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\frac{1}{x-1}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\frac{1}{x-1}=0$$

であるから，直線 $y=x+1$ もこの曲線の漸近線である。

以上から，このグラフの概形は，右の図のようになる。



補足　関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，$\displaystyle\lim_{x\to c+0}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to c-0}f(x)$ のうち，

少なくとも 1 つが ∞ または $-\infty$ であるとき，直線 $x=c$ は漸近線である。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ であるとき，

直線 $y=ax+b$ は漸近線である。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.115〜121

例題）　関数 $y=x-2\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ のグラフの概形

$$y'=1-2\cos x,\qquad y''=2\sin x$$

$0<x<2\pi$ の範囲で，$y'=0$ となる x は　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

また，$y''=0$ となる x は　$x=\pi$

よって，y の増減，グラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	0	$\cdots\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots\cdots$	π	$\cdots\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	2π

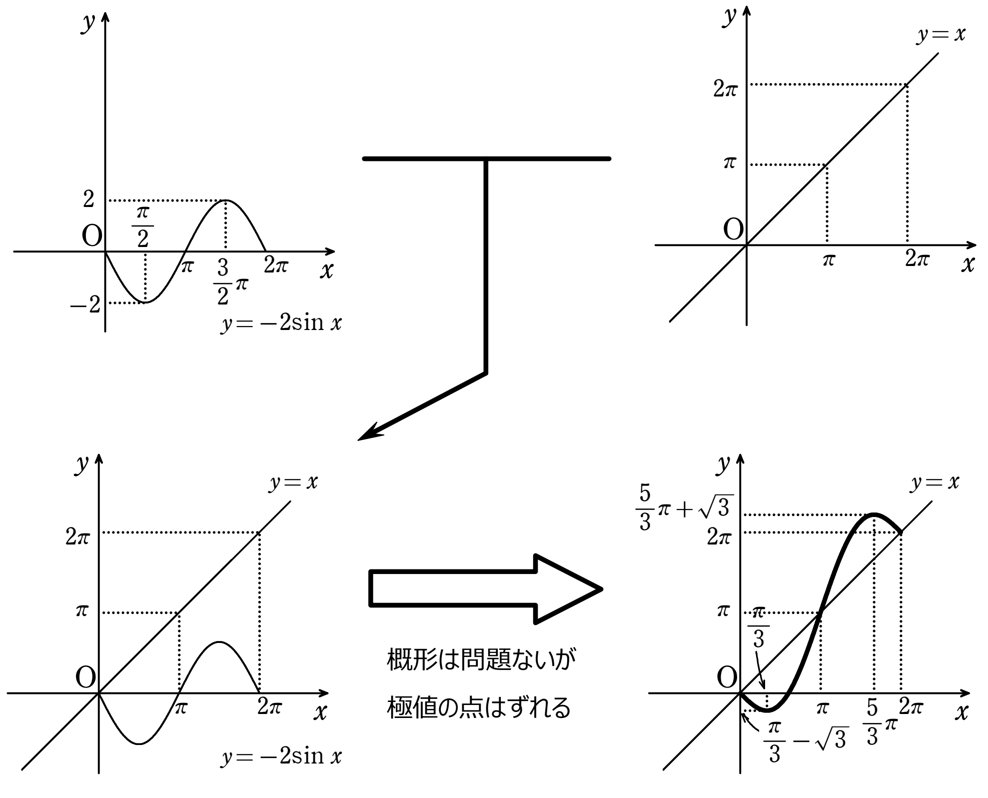
ゆえに，y は

$x=\dfrac{\pi}{3}$ で極小値 $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，

$x=\dfrac{5}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$

をとる。

以上により，グラフの概形は図のようになる。



微分法の応用【関数のグラフ】　p.115～121

■関数のグラフのかき方のまとめ

関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかくには，次のようなことを調べる。

①　定義域　　　　**②　対称性**（ y 軸、原点など）

y 軸対称： $f(-x)=f(x)$
原点対称： $f(-x)=-f(x)$

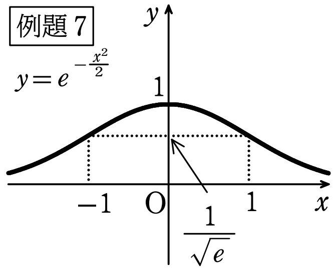
③　関数の増減，極値

④　凹凸，変曲点　　**⑤　漸近線**　　**⑥　座標軸との共有点**

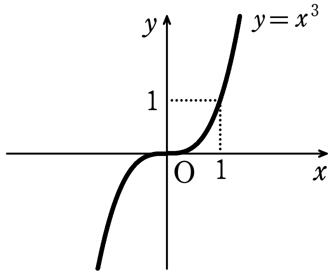
対称性　対称性は，関数 $f(x)$ について成り立つ等式で判断できる。

[1]　$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，
　曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称【偶関数】

[2]　$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，
　曲線 $y=f(x)$ は原点に関して対称【奇関数】



例題 7 の関数 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフは y 軸に関して対称である。
また，たとえば関数 $y=x^3$ のグラフは原点に関して対称である。

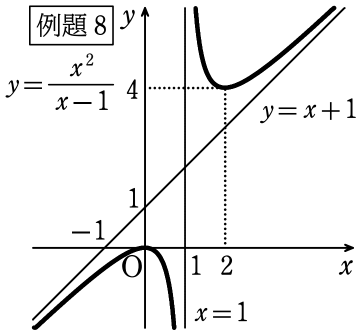


漸近線　関数 $y=f(x)$ のグラフに関して，次のことが成り立つ。

[1]　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ のとき，
　直線 $y=a$ は漸近線である。

[2]　$\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$， $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$ のうち，
　少なくとも 1 つが ∞ または $-\infty$であるとき，
　直線 $x=c$ は漸近線である。

[3]　$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または
　$\lim\limits_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ であるとき，
　直線 $y=ax+b$ は漸近線である。



$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}$でも求めることができる

例えば例題 8 では $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$　より　$y=x+1$

詳細は次ページのコラム参照

例題 7 では [1]，例題 8 では [2]，[3] の極限を調べている。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.115～121

コラム　漸近線の求め方

関数 $y=f(x)$ のグラフに関して

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0 \quad\text{または}\quad \lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

であるとき，直線 $y=ax+b$ は漸近線です。例題８では，関数を $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ と変形して漸近線 $y=x+1$ を求めましたが，すべての関数でこのように変形できるわけではありません。一般には,どのようにして漸近線の方程式を求めればよいか考えてみましょう。

以下では，$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ …… ① である場合について考えることにします。

確認　① であるとき，$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b$ であることを確かめよう。

解答

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}&=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)+b\}\\&=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}+\lim_{x\to\infty}b\\&=0+b=b\end{aligned}$$

上のことから，① であるとき，b は極限値 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}$ として求められることがわかります。

発見　① であるとき，a もある極限値として求められる。

$\lim_{x\to\infty}g(x)=a$ が成り立つような $g(x)$ を予想し，

その $g(x)$ を，$f(x)$ を用いて表してみよう。

また，その予想が正しいことを証明してみよう。

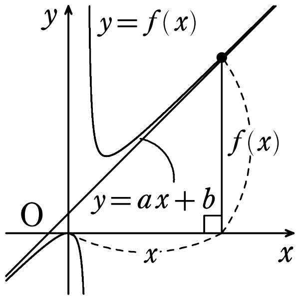
解答　十分大きい x について

$f(x)-(ax+b)\fallingdotseq 0$ と考えると $\dfrac{f(x)}{x}\fallingdotseq a+\dfrac{b}{x}$ と

かけることや，a は漸近線の傾きであることから図より

$x\longrightarrow\infty$ のとき $\dfrac{f(x)}{x}\longrightarrow a$であること

（ $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ であること）が予想される 。



実際

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)+(ax+b)}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}+\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}\right)\\&=0\cdot 0+a+0=a\end{aligned}$$

である。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.115～121

補足　必ず$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=a$ が成り立つとは限らない！

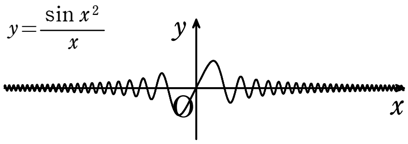
例えば，関数 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$ は $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ であるから x 軸 $(y=0)$ はこの関数のグラフの漸近線である。よって，もし $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=a$ が成り立つならば

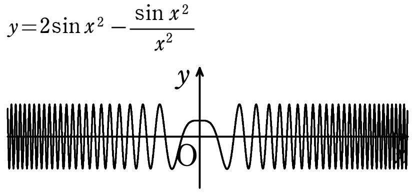
$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$ となるが

$$f'(x)=\frac{\cos x^2\cdot 2x\cdot x-\sin x^2\cdot 1}{x}$$

$$=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$$

となり，　$x\longrightarrow\infty$ のときの $f'(x)$ の極限はない





一般に $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=a$ は成り立たないが，

極限値 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ が存在するとき

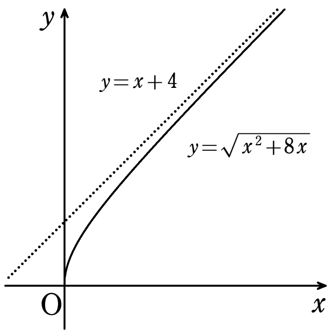
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ は成り立つ

まとめ　関数 $y=\sqrt{x^2+8x}$ $(x\geqq 0)$ のグラフには $y=ax+b$ のようにかける漸近線が存在する。この漸近線の方程式を求めてみよう。

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}$

で求める



解答

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+8x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{8}{x}}$$

$$=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x}-x)(\sqrt{x^2+8x}+x)}{\sqrt{x^2+8x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x)-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}}+1}$$

$$=4$$

よって，求める漸近線の方程式は　$y=x+4$