微分法の応用【関数の最大・最小】　p.114

【内容目標】増減表から最大・最小を読み取ろう！

例題６）　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=(1+\sin x)\cos x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

閉区間で連続な関数は、
その区間で最大値および最小値をもつ

積の微分法

解答

$$\begin{aligned} y' &= \cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)\\ &= \cos^2 x-\sin x-\sin^2 x\\ &= -2\sin^2 x-\sin x+1\\ &= -(2\sin x-1)(\sin x+1)\end{aligned}$$

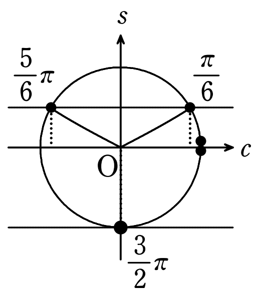
$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$0<x<2\pi$ において，$y'=0$ となる x の値は

$-(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$　より

$\sin x=\dfrac{1}{2}$　または　$\sin x=-1$

より　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$



y の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\frac{\pi}{6}$	……	$\frac{5}{6}\pi$	……	$\frac{3}{2}\pi$	……	2π
$2\sin x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\sin x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1

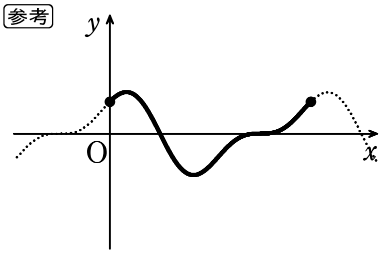
よって，y は

$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

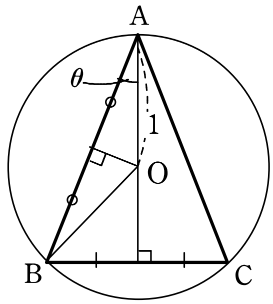
をとる。

参考



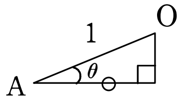
微分法の応用【関数の最大・最小】　p.114

例題） AB＝AC，$\angle BAC = 2\theta$ である二等辺三角形 ABC が，半径 1 の円 O に内接している。θが変化するとき，この三角形の周の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ。



解答　△ABC において

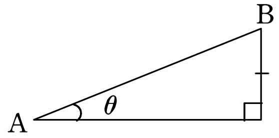
$$AB = AC = 2OA\cos\theta = 2\cos\theta$$
$$BC = 2AB\sin\theta = 4\sin\theta\cos\theta$$



△ABC の周の長さを y とすると

$$y = 4\cos\theta + 4\cos\theta\sin\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

積の微分法



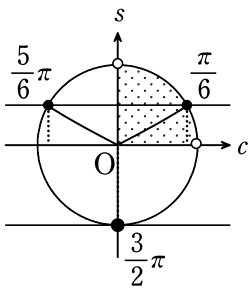
$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

よって

$$\begin{aligned} y' &= -4\sin\theta + 4(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= -4\sin\theta + 4(1-2\sin^2\theta) \\ &= -4(2\sin^2\theta + \sin\theta - 1) \\ &= -4(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) \end{aligned}$$

$y'=0$ となるのは $\sin x = \dfrac{1}{2}$　または　$\sin x = -1$

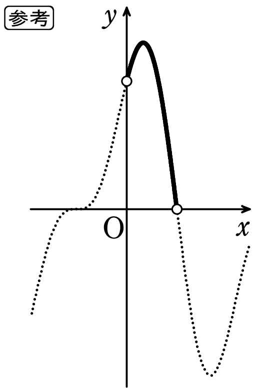
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときである。



また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，y の増減表は次のようになる。

θ	0	……	$\dfrac{\pi}{6}$	……	$\dfrac{\pi}{2}$
$2\sin\theta-1$		$-$		$+$	
$\sin\theta+1$		$+$		$+$	
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 $3\sqrt{3}$	↘	

参考



したがって，y は $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ で 最大値 $3\sqrt{3}$ をとる。