微分法の応用【関数の増減・極大極小】　p.108～113

【内容目標】数Ⅱの知識と数Ⅲの知識を合体させいろいろな曲線の極値を求めよう！

□関数の増減

基本数Ⅱと同じ

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，平均値の定理により，関数の増減*について次のことが成り立つ。

＊区間 I に含まれる任意の 2 数 $x_1,\ x_2$ について，
「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$」が成り立つとき，
関数 $f(x)$ は区間 I で増加するといい，
「$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$」が成り立つとき，
関数 $f(x)$ は区間 I で減少するという。

導関数の符号と関数の増減

1　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，
　　$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する。

2　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，
　　$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する。

3　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，
　　$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。

導関数は「開区間」
関数の連続性は「閉区間」
ちなみに微分不可能な点が含まれていたり、
$f'(x)$ が不連続であっても成り立つ

【1の証明】 $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ となる任意の 2 数 $x_1,\ x_2$ に対して，平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = \underline{\underline{f'(c)(x_2 - x_1)}},\quad x_1 < c < x_2$$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ の分母を払っている形

を満たす実数 c が存在する。

区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) > 0$ ならば，$x_1,\ x_2$ のとり方によらず，<u>常に $f'(c) > 0$</u> となる。

$x_2 - x_1 > 0$ であるから，　$f(x_2) - f(x_1) > 0$　すなわち　$f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ。

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する。

【2の証明】区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) < 0$ ならば，$x_1,\ x_2$ のとり方によらず，<u>常に $f'(c) < 0$</u> となる。

$x_2 - x_1 > 0$ であるから，$f(x_2) - f(x_1) < 0$　　すなわち　　$f(x_1) > f(x_2)$ が成り立ち，

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する。

【3の証明】区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x) = 0$ ならば，$x_1,\ x_2$ のとり方によらず，<u>常に $f'(c) = 0$</u> となる。

よって，$f(x_2) - f(x_1) = 0$　すなわち　$f(x_1) = f(x_2)$ が成り立ち，

$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，3を用いると，次のことが導かれる。

区間 $(a,\ b)$ で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば，区間 $[a,\ b]$ で
　　$g(x) = f(x) + C$　　ただし，C は定数

微分して同じなら
もとのグラフは
定数項の違いだけ
（y 軸方向に平行
移動したもの）

【証明】

$h(x) = g(x) - f(x)$ とする。

区間 $(a,\ b)$ で $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ であるから，$h(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。

この定数を C とすると　　$h(x) = C$

すなわち　$g(x) - f(x) = C$ より　$g(x) = f(x) + C$

微分法の応用【関数の増減・極大極小】 p.108～113

導関数 $f'(x)$ の符号を調べて，関数 $f(x)$ の増減を調べてみよう。

例題３） 次の関数の増減を調べよ。

$$f(x)=x-2\sqrt{x}$$

解答　関数の定義域は $x\geqq 0$ である。 $f(x)=x-2\sqrt{x}=x-2x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=1-2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

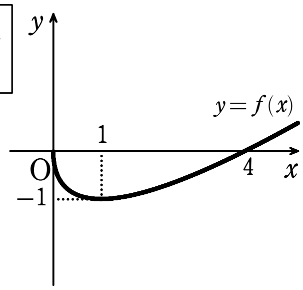
$f'(x)=0$ となる x の値が分かりやすくなるよう変形する

$f'(x)$ の定義域は $x>0$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	1	……
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-1	↗



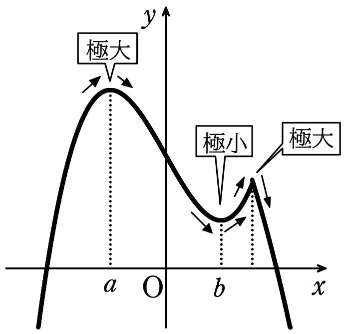
よって，$f(x)$ は

$0\leqq x\leqq 1$ で減少し，$1\leqq x$ で増加する。

□ 関数の極大と極小

基本数Ⅱと同じ

連続な関数 $f(x)$ が，$x=a$ を境目として増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x=a$ で **極大** であるといい，$f(a)$ を **極大値** という。また，関数 $f(x)$ が，$x=b$ を境目として減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x=b$ で **極小** であるといい，$f(b)$ を **極小値** という。極大値と極小値をまとめて **極値** という。



関数 $f(x)$ が $x=a$ を含むある区間で微分可能であり，増減が次のようになる場合は，$f(a)$ が極値である。

x	……	a	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

x	……	a	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

一般に，次が成り立つことが知られている。

> **極値をとるための必要条件**
>
> 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき
>
> $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば　　$f'(a)=0$

ただし，逆は成り立たない。すなわち，

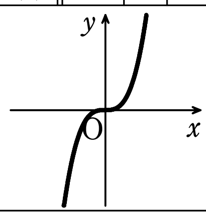
$f'(a)=0$ であっても，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとは限らない。

たとえば，関数 $f(x)=x^3$ は，

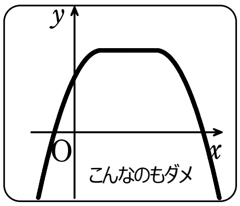
$f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$ であるが，$x=0$ で極値をとらない。

$f(x)=x^3$ の増減表

x	……	0	……
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗



よって，微分可能な関数 $f(x)$ の極値を求めるには，$f'(x)=0$ となる x の値を求め，**その値の前後における $f'(x)$ の符号を調べる必要がある。**



微分法の応用【関数の増減・極大極小】　p.108～113

例題４） 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=xe^{-x}$　　　　(2)　$f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

解答

(1)　$f'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})$

$=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とすると

$x=1$

$e^{-x}>0$ に注意

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	1	……
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	極大 $\dfrac{1}{e}$	↘

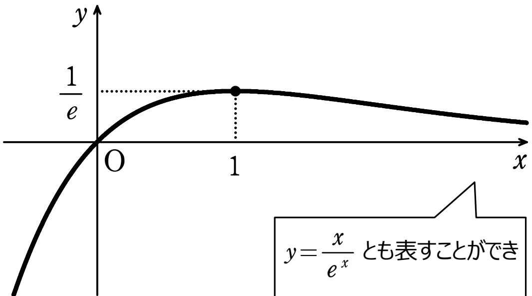
$f(1)=1\cdot e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

よって，$f(x)$ は

$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

極小値はない。

参考



$y=\dfrac{x}{e^x}$ とも表すことができ

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であるから、

x が大きくなると 0 に近付く

（ $y=0$ が漸近線）

(2)　関数の定義域は $x\neq 0$ である。

$f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}$

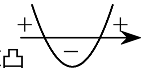
$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると

$x=-2,\ 2$

分子に注目すると

$g(x)=(x+2)(x-2)$ は下に凸



分母は 2 乗の値なので常に正 なので

x	…	−2	…	0	…	2	…
分子	+	0	−	／	−	0	+
分母	+	4	+	／	+	4	+
f'	+	0	−	／	−	0	+

と見ることができる

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

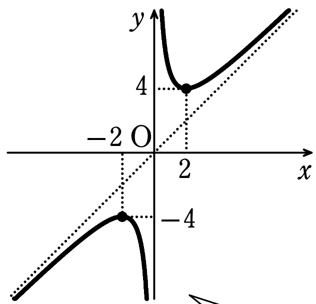
x	……	−2	……	0	……	2	……
$f'(x)$	+	0	−	／	−	0	+
$f(x)$	↗	極大 −4	↘	／	↘	極小 4	↗

よって，$f(x)$ は

$x=-2$ で極大値 -4，

$x=2$ で極小値 4 をとる。

参考



漸近線が $x=0$ と $y=x$ であることから

グラフの概形が分かる

微分法の応用【関数の増減・極大極小】　p.108～113

例題） 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$　商の微分法

$y'=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

（分母）≠0 なので（分子）＝0

$y'=0$ とすると

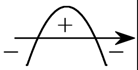
$-x^2+1=0$

$x^2-1=0$より　$(x-1)(x+1)=0$ なので

$x=-1,\ 1$

分子に注目すると

$g(x)=-x^2+1$ は上に凸



分母は 2 乗の値なので常に正 なので

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
分子	$-$	0	$+$	0	$-$
分母	$+$	4	$+$	4	$+$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

と見ることができる

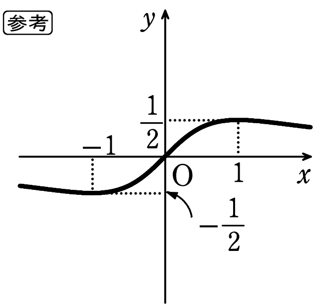
よって，y の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	1	……
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\dfrac{1}{2}$	↗	極大 $\dfrac{1}{2}$	↘

ゆえに，y は $x=-1$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$，

$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

参考



(2)　$y=\sin^2 x+2\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$　半角

$y=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)+2\sin x$　2倍角

$y'=0+\dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot 2+2\cos x$

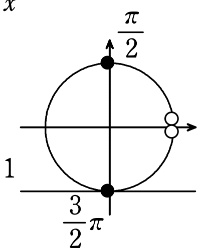
$=2\sin x\cos x+2\cos x$

$=2\cos x(\sin x+1)$

$y'=0$ とすると，

$2\cos x(\sin x+1)=0$

$\cos x=0$，　$\sin x=-1$



$0<x<2\pi$ で

$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$y'=2\cos x(\sin x+1)$ は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	1
$\sin x+1$	1	$+$	2	$+$	0	$+$	1
y'	2	$+$	0	$-$	0	$+$	2

と見ることができる

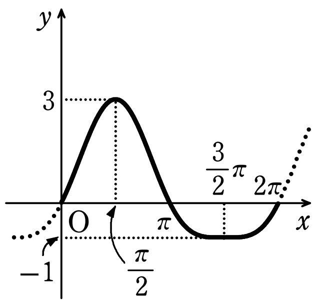
よって y の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\dfrac{\pi}{2}$	……	$\dfrac{3}{2}\pi$	……	2π
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	0	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗	0

ゆえに，y は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で極大値 3，

$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で極小値 -1 をとる。

参考



微分法の応用【関数の増減・極大極小】　p.108～113

関数が $x=a$ で微分可能（なめらか）でなくても，$x=a$ で極値をとる場合がある。

$x=0$ で微分可能でない（右側微分係数と左側微分係数が異なる）

例題５） 関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+1}$ の極値を求めよ。

$\boxed{\text{方針}}$　絶対値をはずし，それぞれの区間で導関数の符号を調べる。

$\boxed{\text{解答}}$　関数の定義域は $x\geqq -1$ である。

○$\geqq 0$ のとき $|○|=x$

ｉ）$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)=x\sqrt{x+1}$

$x>0$ において　$f'(x)=1\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$\{\sqrt{f(x)}\}'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

通分

$$\sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{x+1}}{1}=\frac{\sqrt{x+1}\cdot 2\sqrt{x+1}}{1\cdot 2\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$$

よって，$x>0$ では，$3x+2>0$，$2\sqrt{x+1}>0$ であるから　常に　$f'(x)>0$

ii）$-1\leqq x<0$ のとき　$f(x)=-x\sqrt{x+1}$

○<0 のとき $|○|=-x$

$-1<x<0$ において　$f'(x)=-\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

ｉ）の結果の符号違い

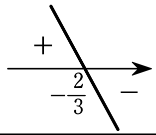
$f'(x)=0$ とすると　$x=-\dfrac{2}{3}$

（分母）$\fallingdotseq 0$ より（分子）$=0$

分子に注目すると

$g(x)=-(3x+2)=-3x-2$ より

＋－はグラフより



となる

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	……	$-\frac{2}{3}$	……	0	……
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗

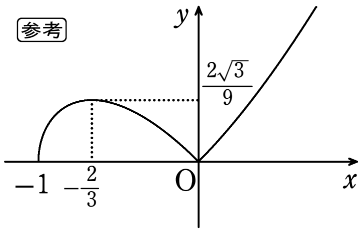
（$-1<x<0$ が ii），$x>0$ が ｉ））

よって，$f(x)$ は

$x=-\dfrac{2}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，

$x=0$ で極小値 0 をとる。

$\boxed{\text{参考}}$



応用例題３） 関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-1}$ が $x=-1$ で極値をとるように，

定数 a の値を定めよ。また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

ヒント　$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，

$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば，$f'(-1)=0$ である。

解答　定義域は　$x-1\neq 0$　より　$x\neq 1$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+a)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$$

数Ⅲの解答としては触れておきたい

$f(x)$ は $x=-1$ **で微分可能であるから，**

$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば　$f'(-1)=0$

すなわち　$\dfrac{(-1)^2-2\cdot(-1)-a}{(-1-1)^2}=\dfrac{2-a}{4}=0$

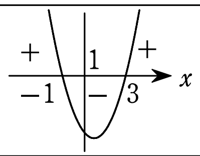
これを解くと，$a=2$ となる。

このとき　$f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

常に $(x-1)^2\geqq 0$ であるから

符号は分子の $(x+1)(x-3)$ できまる



$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	1	……	3	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -1	↘		↘	極小 7	↗

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で極値をとり，条件を満たす。

答　$a=2$，$x=-1$ で極大値 -1，$x=3$ で極小値 7

補足　$f'(-1)=0$ であっても $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるとは限らないため，増減表によって，$x=-1$ で極値をとることを確認している。

深める　応用例題 3 の解答について，次の ①，② を説明してみよう。

①　$f(x)$ が $x=-1$ で微分可能であることを確かめた理由

②　$a=2$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとることを確かめた理由

① $f(x)$ が $x=-1$ で微分可能でなくても、$x=-1$ で極値をとる場合があり、その場合には $x=-1$ で極値をとるならば $f'(-1)=0$ であるとはいえないから

② $f'(-1)=0$ であっても $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるとは限らないから