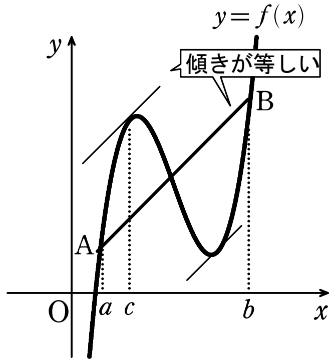
微分法の応用【平均値の定理】　p.106～107

【内容目標】平均値の定理を利用して証明できるようになろう。

□平均値の定理　(→中間値の定理のときに配ったプリントを参照しよう)



　連続な関数 $f(x)$ について，$y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとる。

　$f(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，このグラフ上の A，B 間の点における接線で，直線 AB と平行なものが少なくとも 1 本存在することが知られている。

ここで，直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である。

また，接点の x 座標を c とすると，接線の傾きは $f'(c)$ である。

したがって，次を満たす実数 c が存在する。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

図形的には「曲線 $y=f(x)$ 上に任意の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとると，線分 AB と**平行な接線が引ける**ような点 C が，2 点 A，B 間の曲線上にある。」

　一般に，次の 平均値の定理 が成り立つ。

平均値の定理

　関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

連続を述べるときは
　閉区間であっても、
微分可能を述べるときは
　開区間を考える
（端点は微分不可能でも良い）

例） 次の関数と示された区間について，次の平均値の定理の式を満たす c の値を求めよ。

(1)　$f(x)=x^3-3x^2$，$[-2,\ 1]$　　　(2)　$f(x)=e^x$，$[0,\ 1]$

(1)
　関数 $f(x)=x^3-3x^2$ は微分可能で

　$f'(x)=3x^2-6x \implies f'(c)=3c^2-6c$

　また　$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{-2-(-20)}{3}=6$

　よって，平均値の定理により

　　$6=3c^2-6c$，$-2<c<1$

　を満たす実数 c が存在する。

　$c^2-2c-2=0$ から　　$c=1\pm\sqrt{3}$

　$-2<c<1$ であるから　　$c=1-\sqrt{3}$

(2)　関数 $f(x)=e^x$ は微分可能で

　$f'(x)=e^x \implies f'(c)=e^c$

　また　$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=e-1$

　よって，平均値の定理により

　　$e-1=e^c$，$0<c<1$

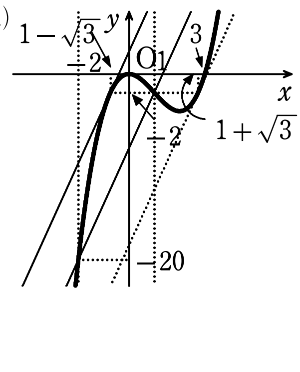
　を満たす実数 c が存在する。

　したがって

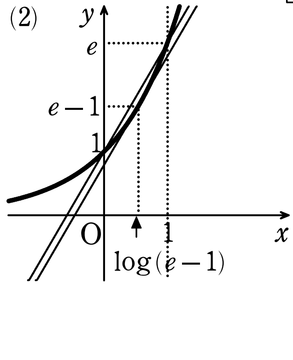
　　$c=\log(e-1)$

対数の定義

参考　(1)



(2)



微分法の応用【平均値の定理】　p.106～107

平均値の定理において，関数 $f(x)$ は区間の端点 a，b では微分可能である必要はなく，連続でありさえすればよい。

しかし，a と b の間に微分可能でない点が１つでもある場合には，平均値の定理を満たす c が存在するとは限らない。

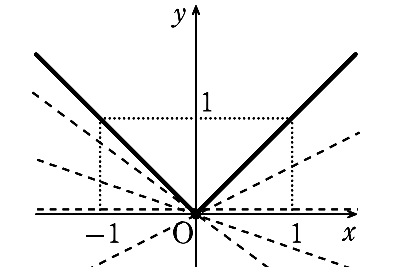
たとえば，区間 $[-1,\ 1]$ において，$f(x)=|x|$ のとき，

$\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-1}{2}=0$ であるが

$f'(c)=0$，$-1<c<1$ を満たす c は存在しない。

これは，区間 $[-1,\ 1]$ で

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能でないからである。



$(0,0)$ ではいろいろな接線が引けてしまう

⇒微分可能ではない

□不等式への応用

平均値の定理を使うのは、主に「不等式の証明」と「漸化式の極限」の問題

応用例題） 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$0<a<b$ のとき　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$

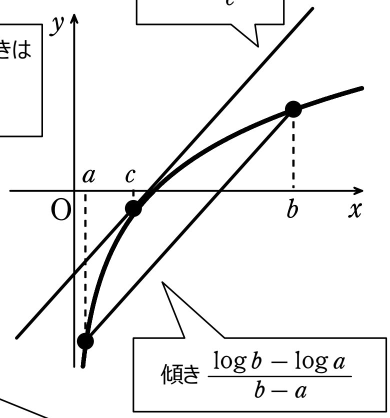
方針 … 関数 $f(x)=\log x$ と区間 $[a,\ b]$ に，平均値の定理を適用する。

解答

関数 $f(x)=\log x$ は，

$x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$x=c$ における傾きは $f'(c)=\dfrac{1}{c}$



区間 $[a,\ b]$ において，

平均値の定理を用いると

$\dfrac{\log b-\log a}{b-a}=\dfrac{1}{c}$，　$a<c<b$

を満たす実数 c が存在する。

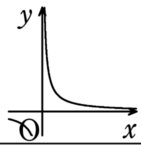
ここでいったん平均値の定理から離れる

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ で単調に減少するから，

$a<c<b$ より

$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{b}$

x が大きくなるほど，y は小さくなる



すなわち　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$

$\dfrac{1}{c}=\dfrac{\log b-\log a}{b-a}$ なので

したがって　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$