微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】　p.93～96

【内容目標】曲線の方程式や媒介変数で表された関数も微分できるようになろう。

□曲線の方程式と導関数

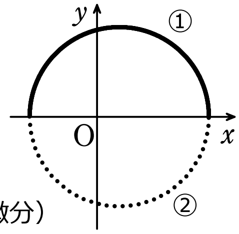
（陰関数の微分法）

（ⅰ）　$y=f(x)$　～　陽関数（*explicit function*）
（ⅱ）　$f(x, y)=0$　～　陰関数（*implicit function*）

円 $(x-1)^2+y^2=16$ について，この式を y について解くと

$y^2=16-(x-1)^2$　より　$y=\pm\sqrt{16-(x-1)^2}$ であるから，

円 $(x-1)^2+y^2=16$ は，2 つの関数 $\begin{cases} y=\sqrt{16-(x-1)^2} & \cdots① \\ y=-\sqrt{16-(x-1)^2} & \cdots② \end{cases}$



のグラフを合わせたものと考えられる 。①の右辺を直接微分すると（陽関数の微分）

$$\frac{dy}{dx}=\left[\{16-(x-1)^2\}^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\{16-(x-1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\{16-(x-1)^2\}'$$

$$=\frac{-2x+2}{2\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{y}=\frac{-(x-1)}{y}=-\frac{x-1}{y}$$

②の右辺を直接微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\left[-\{16-(x-1)^2\}^{\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}\{16-(x-1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\{16-(x-1)^2\}'$$

$$=-\frac{-2x+2}{2\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{-\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{y}=\frac{-(x-1)}{y}=-\frac{x-1}{y}$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}$

ここで $(x-1)^2+y^2=16$ の両辺を x の関数と考えて，それぞれ x で微分すると（**陰関数の微分**）

$x-1$ を置き換えるイメージ

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2+\frac{d}{dx}y^2=0$$

y はそもそも x の関数で $y(x)$ と表すべきものだから合成関数の微分法を用いる

$$\boxed{2(x-1)}\cdot\boxed{1}+\boxed{2y}\cdot\boxed{\frac{dy}{dx}}=0$$

y を置き換えるイメージ

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2(x-1)$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}$

例題７＋α） 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$x^2+y^2+2x-4=0$　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

x だったらいいのにな

(1)　$x^2+\boxed{\boxed{y^2}}+2x-4=0$ の両辺を x について微分すると

$$2x+\boxed{2y}\cdot\boxed{\frac{dy}{dx}}+2=0$$

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x-2$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+1}{y}$

x だったらいいのにな

(2)　$4x^2+\boxed{\boxed{9y^2}}=36$ の両辺を x について微分すると

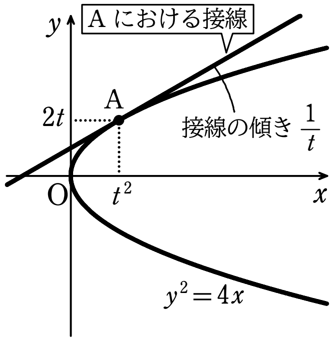
$$8x+\boxed{18y}\cdot\boxed{\frac{dy}{dx}}=0$$

$$18y\cdot\frac{dy}{dx}=-8x$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】　p.93～96

□曲線の媒介変数表示と導関数



放物線 $y^2=4x$ は，次のように**媒介変数表示**される。

$x=t^2$，
$y=2t$

このように媒介変数（パラメータ）を用いて表現された状態を**媒介変数表示**という（t は x と y の橋渡し役になる）

合成関数および逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

また，$\frac{dx}{dt}=2t$，$\frac{dy}{dt}=2$ であるから　　$\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{2t}=\frac{1}{t}$

この式は，放物線 $y^2=4x$ 上の原点以外の点 $(t^2,\ 2t)$ における接線の傾きを表している。

補足　$t=\frac{y}{2}$ より $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ となり，陰関数の微分をした結果と同じであることがわかる。

曲線の媒介変数表示と導関数について，次のことが成り立つ。

曲線の媒介変数表示と導関数

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき　　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$x=f(t)$，$y=g(t)$ それぞれを t について微分してまとめよう

解説　合成関数および逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

一般に，座標平面上の曲線 C の媒介変数表示が，媒介変数を t として与えられたとき，この媒介変数表示が x の関数 y を定めると考え，$\frac{dy}{dx}$ を求めることができる。

例題８） x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

放物線の媒介変数表示　　　楕円の媒介変数表示

(1)　$x=2t$，$y=t^2-1$　　　(2)　$x=3\cos t$，$y=2\sin t$

解説

(1)　$\frac{dx}{dt}=2$，$\frac{dy}{dt}=2t$ から

x，y それぞれ t で微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{2}=t$$

(2)　$\frac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\frac{dy}{dt}=2\cos t$ から

よって，$t\fallingdotseq 0$ のとき　省略されることも

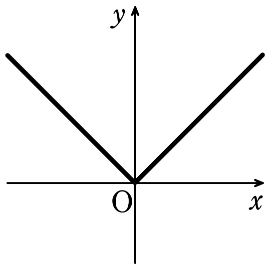
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos t}{-3\sin t}=-\frac{2\cos t}{3\sin t}$$

※ t ではなく x，y のみにするときもある　（そのときは与えられた式を $t=$　にして代入しよう）

(1)なら $t=\frac{x}{2}$ より　$\frac{dy}{dx}=t=\frac{x}{2}$　　(2)なら $\cos t=\frac{x}{3}$，$\sin t=\frac{y}{2}$ より $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$

微分法【コラム：高木関数】 p.99

コラム　高木関数



72 ページの関数 $f(x)=|x|$ は連続関数ですが，$x=0$ で微分可能ではありません。では，ある区間で連続で，その区間のどの x に対しても微分可能でないような関数は存在するでしょうか。

実はそのような関数は存在し，その代表例として高木関数と呼ばれる関数が知られています。

高木関数は，日本の数学者である高木貞治が 1903 年に発表した論文の中で取り上げた関数（連続だが至る所で微分不可能な関数）で，次のように表すことができる関数 $T(x)$ です。

高木 貞治　たかぎ ていじ
1875(明治8)～1960(昭和35)
東京帝国大学名誉教授

> 数直線上で x を座標とする点と整数を座標とする点の距離について考えたとき，その最小値を $s(x)$ とする。
>
> $0\leqq x\leqq 1$ で，$t_n(x)=\dfrac{s(2^n x)}{2^n}$ とするとき
>
> $$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)$$

たとえば，$s(0.3)=0.3$，$s(0.8)=1-0.8=0.2$ です。

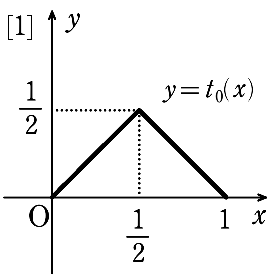
よって　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$s(x)=x$，　$\dfrac{1}{2}<x\leqq 1$ のとき　$s(x)=1-x$

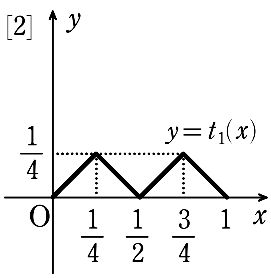
と表すことができ，$y=t_0(x)=s(x)$ のグラフは図 [1] のようになります。

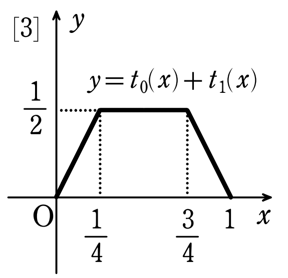
同様にして，$y=t_1(x)$ のグラフは図 [2] のようになり，

$y=t_0(x)$，$y=t_1(x)$から $y=t_0(x)+t_1(x)$ のグラフ (図 [3]) をかくことができます。

このようにして $y=t_0(x)+t_1(x)+t_2(x)+\cdots\cdots+t_n(x)$ のグラフを考えていくと，n が大きくなるにつれて高木関数のグラフに近づいていきます。







微分法【コラム：高木関数】　p.99

練習）　$y=t_0(x)+t_1(x)+t_2(x)$ のグラフをかいてみよう。

解答

$0\leqq 2^2x\leqq \frac{1}{2}$ のとき，すなわち $0\leqq x\leqq \frac{1}{8}$ のとき　$s(2^2x)=4x$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{4x}{4}=x$

$\frac{1}{2}<2^2x\leqq 1$ のとき，すなわち $\frac{1}{8}<x\leqq \frac{1}{4}$ のとき　$s(2^2x)=1-4x$ より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{1-4x}{4}=\frac{1}{4}-x$

$1<2^2x\leqq \frac{3}{2}$ のとき，すなわち $\frac{1}{4}<x\leqq \frac{3}{8}$ のとき　$s(2^2x)=4x-1$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{4x-1}{4}=x-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}<2^2x\leqq 2$ のとき，すなわち $\frac{3}{8}<x\leqq \frac{1}{2}$ のとき　$s(2^2x)=2-4x$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{2-4x}{4}=\frac{1}{2}-x$

$2<2^2x\leqq \frac{5}{2}$ のとき，すなわち $\frac{1}{2}<x\leqq \frac{5}{8}$ のとき　$s(2^2x)=4x-2$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{4x-2}{4}=x-\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}<2^2x\leqq 3$ のとき，すなわち $\frac{5}{8}<x\leqq \frac{3}{4}$ のとき　$s(2^2x)=3-4x$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{3-4x}{4}=\frac{3}{4}-x$

$3<2^2x\leqq \frac{7}{2}$ のとき，すなわち $\frac{3}{4}<x\leqq \frac{7}{8}$ のとき　$s(2^2x)=4x-3$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{4x-3}{4}=x-\frac{3}{4}$

$\frac{7}{2}<2^2x\leqq 4$ のとき，すなわち $\frac{7}{8}<x\leqq 1$ のとき　$s(2^2x)=4-4x$　より　$t_2(x)=\frac{s(2^2x)}{2^2}=\frac{4-4x}{4}=1-x$

以上より，$y=t_0(x)+t_1(x)+t_2(x)$ は

$0\leqq x\leqq \frac{1}{8}$ のとき　$y=2x+x=3x$

$\frac{1}{8}<x\leqq \frac{1}{4}$ のとき　$y=2x+\left(\frac{1}{4}-x\right)=x+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}<x\leqq \frac{3}{8}$ のとき　$y=\frac{1}{2}+\left(x-\frac{1}{4}\right)=x+\frac{1}{4}$

$\frac{3}{8}<x\leqq \frac{1}{2}$ のとき　$y=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)=1-x$

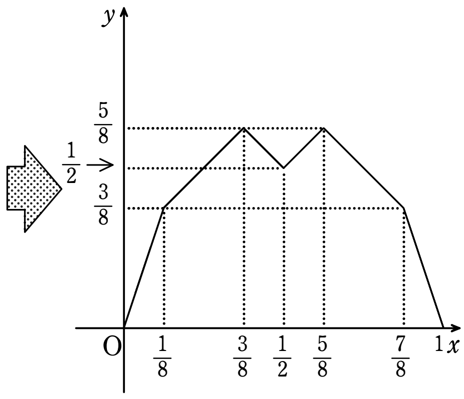
$\frac{1}{2}<x\leqq \frac{5}{8}$ のとき　$y=\frac{1}{2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)=x$

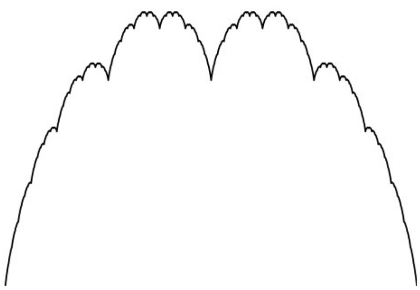
$\frac{5}{8}<x\leqq \frac{3}{4}$ のとき　$y=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-x\right)=\frac{5}{4}-x$

$\frac{3}{4}<x\leqq \frac{7}{8}$ のとき　$y=(-2x+2)+\left(x-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}-x$

$\frac{7}{8}<x\leqq 1$ のとき　$y=(-2x+2)+(1-x)=3-3x$

したがって，$y=t_0(x)+t_1(x)+t_2(x)$ のグラフは，下の図のようになる。





高木曲線

フラクタル曲線の一種で

ブラマンジェ曲線（Blancmange curve）

とも呼ばれる