微分法【第 n 次導関数】　p.92

【内容目標】高次導関数の表記法を身につけ計算できるようにしよう。

□第 n 次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である。この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y=f(x)$ の **第 2 次導関数** といい，

y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などの記号で表す。

> $f''(x)$ は f ツーダッシュや f ツープライム
> $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は d ツー y 、dx ツーなどと読もう！

さらに，$f''(x)$ の導関数を，

関数 $y=f(x)$ の **第 3 次導関数** といい，y'''，$f'''(x)$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}$，$\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ などの記号で表す。

注意 y'，$f'(x)$ などを 第 1 次導関数 ということがある。

例１１）次の関数について，第 2 次導関数および第 3 次導関数を求めよ。

(1)　$y=\sin x$ について

$y'=\cos x$，　$y''=-\sin x$，　$y'''=-\cos x$

(2)　$y=e^{-x}$ について

$y'=-e^{-x}$，　$y''=e^{-x}$，　$y'''=-e^{-x}$

一般に，関数 $y=f(x)$ を順次微分して n 回微分後に得られる関数を，$y=f(x)$ の **第 n 次導関数** といい，$y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$，$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などの記号で表す。なお，$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ は，それぞれ y'，y''，y''' を表す。第 2 次以上の導関数を **高次導関数** という。

たとえば，関数 $y=e^{-x}$ の導関数について，第 n 次導関数は $y^{(n)}=(-1)^ne^{-x}$ である。

例題）次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1)　$y=e^{2-x}$　　　　(2)　$y=xe^x$

> 微分を繰り返すので
> 指数のままにしておく

解答

(1)　$y'=e^{2-x}\cdot(-1)=-e^{2-x}$，

$y''=-e^{2-x}\cdot(-1)=(-1)^2e^{2-x}$，　$(-1)^{\square}$ が 第n 次導関数と一致する

$y'''=(-1)^2e^{2-x}\cdot(-1)=(-1)^3e^{2-x}$，……

よって　　$y^{(n)}=(-1)^ne^{2-x}$

(2)　$y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，

$y''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$，　次数と一致

$y'''=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$，……

よって　　$y^{(n)}=(x+n)e^x$