微分法【対数関数の導関数】 p.86～89

【内容目標】対数関数・指数関数の微分をマスターしよう。

□対数関数の導関数

a は 1 でない正の定数とする。微分係数の定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\boxed{\frac{h}{x}}\right)\right\}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\boxed{\frac{h}{x}}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで，$\boxed{\frac{h}{x}}=k$ とおくと，

$h\longrightarrow 0$ のとき $k\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}\quad\cdots\cdots①$$

0 に近い k の値について，$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値は，次の表のようになる。

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$	k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	2.593742……	−0.1	2.867971……
0.01	2.704813……	−0.01	2.731999……
0.001	2.716923……	−0.001	2.719642……
0.0001	2.718145……	−0.0001	2.718417……
0.00001	2.718268……	−0.00001	2.718295……

この表から，$k\longrightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくと予想される。また，実際に極限値をもつことが知られている。この極限値を e で表す。

$$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ でも表される。

（n は自然数）

∞ に近付く

$(1+\square)^{\blacksquare}$

0 に近付く

e は次のような数で，無理数であることが知られている。

$$e=2.71828182845\cdots\cdots\fallingdotseq 2.718$$

正の定数 e を用いると，① から次が成り立つ。

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log_e a}$$

$\log_a e=\frac{\log_e e}{\log_e a}$，$\log_e e=1$

とくに，対数の底が e のときは，次のようになる。

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

自然対数は「ネイピアの対数」、常用対数は「ブリッグスの対数」と呼ばれる

e を底とする対数を 自然対数 という。微分法や積分法では $\log_e x$ の底 e を省略して $\log x$ と書くことが多く，自然対数を単に対数ということもある。

e を「自然対数の底」や「ネイピア数」と呼ぶ

補足 e や π などを超越数という。

（⇔有理数係数の多項式で表される方程式の解となる複素数を代数的数という）

以上をまとめると，次のようになる。

対数関数の導関数

$$(\log x)'=\frac{1}{x}\qquad\qquad(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$

微分法【対数関数の導関数】　p.86～89

例題４改） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log 2x$　　(2)　$y=\log_2(2x+3)$　　(3)　$y=x\log_2 3x$

$2x$ が x だったらいいのにな

$2x+3$ が x だったらいいのにな

積の微分法

&

$3x$ が x だったらいいのにな

解答　(1)　$y'=\dfrac{1}{2x}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

(2)　$y'=\dfrac{1}{(2x+3)\log 2}\cdot(2x+3)'$

$=\dfrac{2}{(2x+3)\log 2}$

$$\{\log f(x)\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

(3)　$y'=(x)'\cdot\log_2 3x+x(\log_2 3x)'$

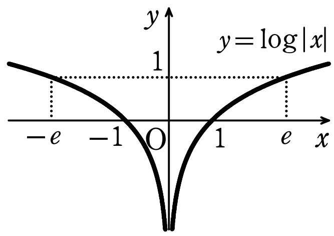
$=1\cdot\log 3x+x\cdot\dfrac{1}{3x\log 3}\cdot(3x)'$

$=\log 3x+\dfrac{1}{\log 3}$

対数関数の導関数を用いて，関数 $\log|x|$ の導関数を求めてみよう。

$x>0$ のとき　$(\log|x|)'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

$x<0$ のとき　$(\log|x|)'=\{\log(-x)\}'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{1}{x}$



したがって，関数 $\log|x|$ の導関数は，次の式で表される。

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$$

練習１９）　$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$ であることを示せ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

$x>0$ のとき　$(\log_a|x|)'=(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$x<0$ のとき　$(\log_a|x|)'=\{\log_a(-x)\}'=\dfrac{1}{-x\log a}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

よって　$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

別解　底の変換公式を用いて

$(\log_a|x|)'=\left(\dfrac{\log|x|}{\log a}\right)'=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\log a}$

以上をまとめると，次のようになる。

絶対値を含む対数関数の導関数

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}\qquad(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\log a}$$

微分法【対数関数の導関数】 p.86～89

例題５＋α） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|\cos x|$　　(2) $y=\log_3|x^2-1|$

(3) $y=\log_{10}|2x|$　　(4) $y=\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

解説

(1) $y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

(2) $y'=\dfrac{1}{(x^2-1)\log 3}\cdot(x^2-1)'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\log 3}$

(3) $y'=\dfrac{1}{2x\log 10}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{2x\log 10}=\dfrac{1}{x\log 10}$

$$\log_a M\times N=\log_a M+\log_a N$$

別解　$y=\log_{10}2+\log_{10}|x|$ であるから　$y'=\dfrac{1}{x\log 10}$

(4) $y=\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\log|x-1|-\log|x+1|$ であるから

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$y'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

□**対数微分法** ～ 両辺の自然対数をとって微分する方法　$(\log|y|)'=\dfrac{y'}{y}$

応用例題１） $\log|y|$ の導関数を利用して，関数 $y=\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$ を微分する。

解答　両辺の絶対値の自然対数をとると

対数の真数は正でなくてはいけない
⇒符号が不明の時は絶対値をとる

$$\log|y|=\left|\log\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$$

$$=\log|x-1|+3\log|x+3|-4\log|x+2|$$

$$\log_a M\times N=\log_a M+\log_a N$$
$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+2}$$

通分

$$=\frac{(x+3)(x+2)+3(x-1)(x+2)-4(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

両辺に $y=\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$ をかけて

$$y'=\frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\cdot\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}$$

微分法【指数関数の導関数】　p.90～91

□指数関数の導関数

a は 1 でない正の定数とする。指数関数 $y=a^x$ の導関数を調べよう。

○逆関数の微分法と

対数関数の導関数の公式の利用

$y=a^x$ をx について解くと　$x=\log_a y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y\log a}}=y\log a$$

$y=a^x$ 代入

よって　$(a^x)'=a^x\log a$

また、

$y=e^x$ を x について解くと　$x=\log y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y$$

$y=e^x$ 代入

よって　$(e^x)'=e^x$

○対数微分法の利用

$y=a^x$ の両辺の対数をとると

$\log y=\log a^x$

$\log y=x\log a$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\log a$$

よって　$y'=y\cdot\log a$

$\therefore$　$(a^x)'=a^x\log a$

とくに　$a=e$ とすると

$(e^x)'=e^x\log e$

ゆえに　$(e^x)'=e^x$

以上をまとめると，次のようになる。

指数関数の導関数

$$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\log a$$

例題） 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする。

(1)　$y=e^{2x}$　　(2)　$y=a^{-2x}$　　(3)　$y=xa^x$

解答　(1)　$y'=e^{2x}\cdot(2x)'$　2x がx だったらいいのにな

$=2e^{2x}$

(2)　$y'=a^{-2x}\log a\cdot(-2x)'$　$-2x$ がx だったらいいのにな

$=-2a^{-2x}\log a$

(3)　$y'=(x)'a^x+x(a^x)'$　積の微分法 「微分そのまま＋そのまま微分」

$=1\cdot a^x+x\cdot a^x\log a$　a^x でくくっておく

$=a^x(1+x\log a)$

研究 指数関数 $y=a^x$ のグラフと e の関係

ここでは，e と指数関数 $y=a^x$ のグラフとの関係について調べてみよう。

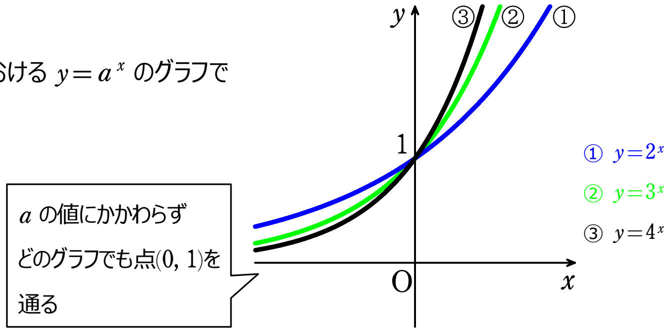
a は 1 でない正の定数とする。
右の図は，いろいろな a の値における $y=a^x$ のグラフで

① $y=2^x$ $(a=2)$

② $y=3^x$ $(a=3)$

③ $y=4^x$ $(a=4)$

である。



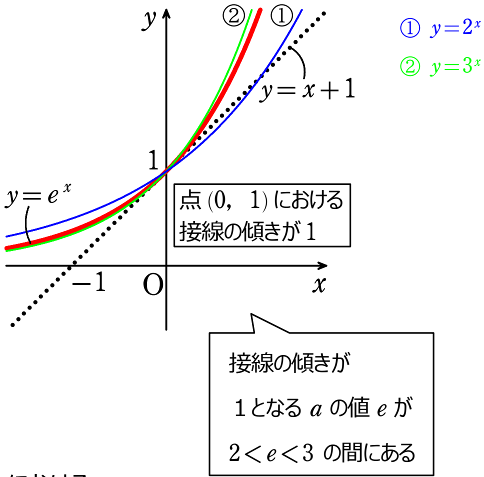
$f(x)=a^x$ とすると，$f'(0)$ は $y=a^x$ のグラフ上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きを表す。

$f'(x)=a^x\log a$ であるから

$$f'(0)=a^0\log a$$
$$=\log a$$

となり，次が成り立つ。

$$f'(0)=1 \iff \log a=1$$
$$\iff a=e^1$$
$$\iff a=e$$
$$\iff f(x)=e^x$$



よって，指数関数 $y=a^x$ のグラフ上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きが 1 となるような a の値が e であることがわかる。

$e=2.71828182845\cdots\cdots$