微分法【三角関数の導関数】　p.84～85

【内容目標】三角関数の微分をマスターしよう。

□三角関数の導関数

導関数の定義より　$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$　において，

加法定理　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x$$
$$= (\cos h - 1)\sin x + \cos x\sin h$$

であるから　$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x\right)$

ここで，$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$，$\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ により

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x$$

よって　$(\sin x)' = \cos x$

別解　和積の公式

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を用いて

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right\}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$
$$= \cos x \cdot 1 = \cos x$$

次に，等式 $\cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ と合成関数の微分法から

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}'$$

$\sin x$ だったらいいのにな

$$= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x+\frac{\pi}{2}\right)'$$
$$= -\sin x$$

したがって　$(\cos x)' = -\sin x$

さらに，$\sin x$，$\cos x$ の導関数を利用して，$\tan x$ の導関数を求めよう。

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と商の導関数の公式から

(**微分**)×(**そのまま**)－(**そのまま**)×(**微分**)

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

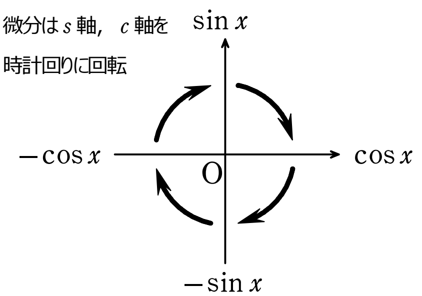
これらの結果をまとめると，次のようになる。

三角関数の導関数

$(\sin x)' = \cos x$　　$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

微分は s 軸，c 軸を
時計回りに回転



微分法【三角関数の導関数】　p.84～85

例題３改） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sin(2x-3)$　　(2)　$y=\cos^2 x$　　(3)　$y=\dfrac{1}{\tan x}$

解答　(1)　$y'=\cos(2x-3)\cdot(2x-3)'$　　sin x だったらいいのにな

$=2\cos(2x-3)$

(2)　半角の公式より　　x だったらいいのにな

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

よって　$y'=\left\{\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\right\}'$

$$=\frac{1}{2}(0-\sin 2x\cdot 2)$$

$$=-\sin 2x$$

x^2 だったらいいのにな

別解

$$y'=\{(\cos x)^2\}'$$
$$=2\cos x\cdot(\cos x)'$$
$$=2\cos x\cdot(-\sin x)$$
$$=-2\sin x\cos x$$
$$=-\sin 2x$$

(3)　$y'=-\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x}$　　商の微分法

$$=-\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

別解

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$
$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

◎三角関数は「半角の公式」や「和積・積和の公式」で倍角に変換すると良い

$\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

練習１７） (1)　関数 $y=x\sin x+\cos x$ を微分せよ。

積の微分法

解答　$y'=\boxed{(x\sin x)'}+(\cos x)'$

$$=\{(x)'\sin x+x(\sin x)'\}-\sin x$$
$$=(1\cdot\sin x+x\cos x)-\sin x$$
$$=x\cos x$$