微分法【合成関数の微分法】　p.78～79

【内容目標】合成関数の微分法は絶対にマスターしよう。

□合成関数の微分法

合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u の関数として微分可能，$u=g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする。このとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$\leftarrow \dfrac{d○}{d△}$ は ○ を △ で微分

$\dfrac{dy}{dx}=\{f(g(x))\}'$，$\dfrac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ と表すと，

$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

証明　u の関数 $y=f(u)$，x の関数 $u=g(x)$ がともに微分可能なとき，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，　u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

$u=g(x)$ は連続であるから，$\Delta x\longrightarrow 0$ のとき　$g(x+\Delta x)\longrightarrow g(x)$

$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ であるから，$\Delta x\longrightarrow 0$ のとき $\Delta u\longrightarrow 0$ である。

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$

$=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}$ で１つの記号であるが、分数のように見ると約分の話

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{\cancel{du}}\cdot\dfrac{\cancel{du}}{dx}$

注意　$d○$ や $\Delta○$ はこれで一つの記号

Δ(大文字のデルタ) … 差を表す

δ(小文字のデルタ) … 無限小の変化を表す

d(小文字のディー) … 無限小の差(微分)を表す

例５改～７）　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x^3+x+1)^4$

$u=x^3+x+1$ とすると $y=u^4$

丁寧に書くと…

「$y=x^4$ だったらいいのにな…」と思って微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot(3x^2+1)=\boxed{4(x^3+x+1)^3}\boxed{(3x^2+1)}$$

置き換えたもの（ x^3+x+1 ）の微分

(2)　$y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$

$u=2x+1$ とすると $y=\dfrac{1}{u^3}$　すなわち　$y=u^{-3}$

丁寧に書くと…

「$y=x^{-3}$ だったらいいのにな…」と思って微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\boxed{-3u^{-4}}\cdot\boxed{2}=-\frac{6}{(2x+1)^4}$$

置き換えたもの（ $2x+1$ ）の微分

(3)　$y=(3x^2-2)^5$

「$y=x^5$ だったらいいのにな…」と思って微分

$y'=\boxed{5(3x^2-2)^4}\cdot\boxed{(3x^2-2)'}$

置き換えたもの（ $3x^2-2$ ）の微分

$=5(3x^2-2)^4\cdot 6x=30x(3x^2-2)^4$

$y=\boxed{}^5$ について

$y'=5\boxed{}^4\cdot(\boxed{})'$

微分法【合成関数の微分法】　p.78～79

練習１０） 微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，次の等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$　　ただし，a，b は定数

(2)　$\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^n=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$　　ただし，n は整数

解説

(1)　$y=f(ax+b)$，$u=ax+b$ とおくと

$y=f(u)$，$\dfrac{dy}{du}=f'(u)$，$\dfrac{du}{dx}=a$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=f'(u)\cdot a=af'(ax+b)$

置き換えるものが１次式のときの話

⇒　準公式として扱ってもよい

(2)　$y=\{g(x)\}^n$，$u=g(x)$ とおくと

$y=u^n$，$\dfrac{dy}{du}=nu^{n-1}$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=nu^{n-1}\cdot g'(x)=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$

前のページの $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ の証明について、$\Delta u=0$ については触れておらず、その分では厳密な証明とは言いづらい。

そこで、関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるということを

『次の極限値が存在する。$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 』……①　と表し、

この極限値が存在するとき、その極限値を $f'(a)$ と表す。そこで①は

『次の等式が成り立つような定数 p が存在する。　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-ph}{h}=0$ 』と同値である。

このとき、$p=f'(a)$ である。この lim の中身を $\varepsilon(h)$ とおくと次のようにも述べることができる。

『次のような定数 p と関数 $\varepsilon(h)$ がある。　$f(a+h)=f(a)+ph+h\varepsilon(h)$，$\displaystyle\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ 』

（項 $h\varepsilon(h)$ は $h\to0$ での高位の無限小と呼ばれ、$h\to0$ のもとで、$\varepsilon(h)$ が 0 に近づくので、

$h\varepsilon(h)$ は極めて小さいこととなる。）

この言い換えを用いると…

仮定から、次のような定数 p，q と関数 $\varepsilon(h)$，$\delta(k)$ がある。$b=f(a)$ とすると

$f(a+h)=f(a)+ph+h\varepsilon(h)$，$\displaystyle\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$，　$g(b+k)=g(b)+qk+k\delta(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to0}\delta(k)=0$

$k=f(a+h)-f(a)$ のとき、$f(a+h)=f(a)+k$ から

$g(f(a+h))=g(f(a)+k)=g(f(a))+qk+k\delta(k)$

$f(a+h)=f(a)+ph+h\varepsilon(h)$ と $f(a+h)=f(a)+k$ から $k=ph+h\varepsilon(h)$ でもあるので

$$g(f(a+h))=g(f(a))+q\{ph+h\varepsilon(h)\}+\{ph+h\varepsilon(h)\}\delta(ph+h\varepsilon(h))$$
$$=g(f(a))+pqh+h[q\varepsilon(h)+\{p+\varepsilon(h)\}\delta(ph+h\varepsilon(h))]$$

ここで　$\displaystyle\lim_{h\to0}[q\varepsilon(h)+\{p+\varepsilon(h)\}\delta(ph+h\varepsilon(h))]=0$ が成り立っているので　$g(f(a+h))=g(f(a))$ となる。

これで合成関数の微分法の公式が正しいことが確かめられた。

微分法【逆関数の微分法】　p.80～82

□逆関数の微分法

$\dfrac{dy}{dx}$ で 1 つの記号であるが、分数のように見ると逆数の話

$$\frac{dy}{dx}=1\div\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

逆関数の微分法　$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

逆数の関係

証明　一般に，関数 $f(x)$，$g(x)$ が互いに逆関数で，ともに微分可能であるとする。$y=f(x)$ を x について解くと　$x=g(y)$

この両辺を x で微分すると　$\displaystyle 1=\frac{d}{dx}g(y)$

合成関数の微分

すなわち　$\displaystyle 1=\frac{d}{dy}g(y)\cdot\frac{dy}{dx}$

掛けて 1 なので $\dfrac{dx}{dy}\fallingdotseq 0$

ここで，$g(y)=x$ であるから　$\displaystyle 1=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$　ゆえに　$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

例８）　関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の式を x について解くと　$x=y^4$　…… ①である。

① の右辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}y^4=\frac{d}{dy}y^4\cdot\frac{dy}{dx}=4y^3\frac{dy}{dx}$$

合成関数の微分法

であるから，① の両辺を x で微分すると

$$1=4y^3\frac{dy}{dx}$$

掛けて 1 なので $4y^3\fallingdotseq 0$

よって，関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数は，次のようになる。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

別解

$y=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$ なので

$$y'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

□ $x^{\frac{m}{n}}$ の導関数

n が正の整数であるとき，関数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ の導関数は，逆関数の微分法を用いて，次のようにして求められる。

逆関数の微分法

証明）　$y=x^{\frac{1}{n}}$ を x について解くと　$x=y^n$　よって　$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}$

ここで　$\displaystyle \frac{1}{y^{n-1}}=\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}=x^{\frac{1}{n}-1}$

したがって　$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$　すなわち　$\displaystyle \left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

上の結果は，すでに学んだ導関数の公式　$(x^n)'=nx^{n-1}$において，

指数 n を $\dfrac{1}{n}$ におき換えたものであることがわかる。

微分法【逆関数の微分法】　p.80～82

例題） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt{x^3}$　　(2)　$y=\sqrt[4]{2x-3}$　　(3)　$y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$

(解説)

(1)　$y=\sqrt{x^3}$ は $y=x^{\frac{3}{2}}$ と表されるから

単項式の形なら指数で処理に

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(2)　$y=\sqrt[4]{2x-3}$ は $y=(2x-3)^{\frac{1}{4}}$ と表されるから

$$y'=\left\{(2x-3)^{\frac{1}{4}}\right\}'$$

「だったらいいのにな…」と思って微分

$$=\boxed{\frac{1}{4}(2x-3)^{\frac{1}{4}-1}}\cdot\boxed{(2x-3)'}$$

置き換えたものの微分

$$=\frac{1}{4}(2x-3)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-3)^3}}$$

(3)　$y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ は $y=(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ と表されるから

$$y'=\left\{(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}\right\}'$$

「だったらいいのにな…」と思って微分

$$=\boxed{\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1}}\cdot\boxed{(x^2+x+1)'}$$

置き換えたものの微分

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+1)$$

$$=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$