微分法【微分法の基本】　p.74～77

【内容目標】微分法の基本をおさえて計算できるようになろう。

□導関数の計算

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ **を** x **で微分する** または単に **微分する** という。

> 導関数の公式（１～３は，数学Ⅱで学んだものと同じ）
>
> 関数 $f(x)$，$g(x)$ が（ある区間で）ともに微分可能であるとき
>
> 1　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　ただし，k は定数　2　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$
>
> 3　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$
>
> **4**　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

積の微分法

これを使うと展開しなくてもＯＫ

(**微分**)×(**そのまま**)＋(**そのまま**)×(**微分**)

商の微分法の関係で順番は変えない方が良い

【４の証明】

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\boxed{-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}-f(x)g(x)}{h}$$

□の中で帳尻合わせ

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　$\displaystyle\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

よって　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　終

□関数 x^n の導関数

> x^n の導関数（数Ⅱのおさらい）
>
> n が自然数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

また，c を定数とするとき，$(c)'=0$ である。

＊ 二項定理を利用して証明することができる（ 数学Ⅱの教科書より）

$$(x+h)^n={}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$$

であるから，$y=x^n$ において

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{{}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots h^{n-1}\right)={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}=nx^{n-1}$$

微分法【微分法の基本】　p.74～77

＊ 公式４を用いて，数学的帰納法によって証明することもできる。

$n=1$ のとき $(x)'=1$，$1\cdot x^0=1$ であるから成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つ，すなわち $(x^k)'=kx^{k-1}$ であると仮定すると

$$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'x+x^k(x)'=kx^{k-1}\cdot x+x^k\cdot 1=(k+1)x^k$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

例題１）　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=2x^5-5x^4$　　　(2)　$y=(x^2-3)(4x^2+5)$

解答　(1)　$y'=2\cdot 5x^4-5\cdot 4x^3=10x^4-20x^3$

(**微分**)×(**そのまま**)＋(**そのまま**)×(**微分**)

(2)　$y'=(x^2-3)'(4x^2+5)+(x^2-3)(4x^2+5)'$

$=2x(4x^2+5)+(x^2-3)\cdot 8x$

$=8x^3+10x+8x^3-24x$

$=16x^3-14x$

いずれか１つの項が微分されたものの和

⇩

参考　３つでも同じ考え方で

$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$

となる。【節末問題３】

□商の微分法

商の導関数については，次の公式が成り立つ。

商の導関数（**商の微分法**）

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

とくに $f(x)=1$ とすると　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

商（分数型）の微分は

積の微分法は ＋

商の微分法は －

$$\frac{(\text{分子の微分})\times(\text{分母})-(\text{分子})\times(\text{分母の微分})}{(\text{分母})^2}$$

(**微分**)×(**そのまま**)－(**そのまま**)×(**微分**)

$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=\{(g(x)^{-1})\}'$ とみると

$\{(g(x))^{-1}\}'=-\{g(x)\}^{-2}\times g'(x)$

$=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

※合成関数の微分はのちほど

微分法【微分法の基本】 p.74～77

例題２） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{3x+2}$　　(2) $y=\dfrac{3x}{x^2-1}$

(解説)

(1) $y'=-\dfrac{(3x+2)'}{(3x+2)^2}$

$=-\dfrac{3}{(3x+2)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(3x)'(x^2-1)-3x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

(**微分**)×(**そのまま**)−(**そのまま**)×(**微分**)

$=\dfrac{3(x^2-1)-3x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}$

$=-\dfrac{3x^2+3}{(x^2-1)^2}$

□関数 $x^{\bigcirc}$ の導関数（拡張）

$x^{\bigcirc}$ の導関数　○ が**整数**でも**有理数**でも**実数**でも　$(x^{\bigcirc})'=\bigcirc x^{\bigcirc-1}$

注意 $n=0$ のときも $(x^0)'=(1)'=0$，$0\cdot x^{n-1}=0$ であることから成り立つ

例４） 次の関数を微分せよ。

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

単項式の形なら 指数で処理に