微分法【微分係数】　p.70～71

【内容目標】「微分可能」と「連続」の関係性を押さえ、導関数を求められるようにしよう。

□微分係数（おさらいを含む）

関数 $f(x)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，

$a+h$ や a は $f(x)$ の定義域に属する

$f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるという。

また，この極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** または 変化率 といい，$f'(a)$ で表す。

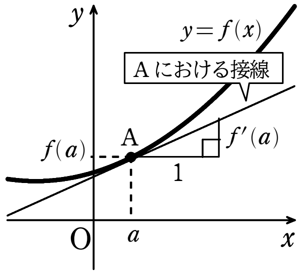
微分係数　$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

注意　$a+h=x$ とおくと $h=x-a$ であり，$h\longrightarrow0$ のとき $x\longrightarrow a$ となる。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，

微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$

における接線の傾きを表す＊。



＊ 連続な関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でないとき，

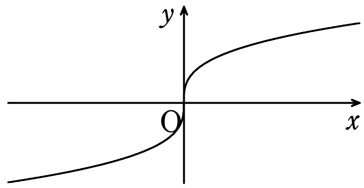
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線が

存在しないか，または接線が x 軸に垂直である。

例えば　$y=\sqrt[3]{x}$ のグラフは $y=x^3$ の逆関数であることを考えると

右のグラフのようになり，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\infty$ であるから

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない



例１） 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の $x=3$ における微分係数を定義にしたがって求めよ。

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形

$$=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$$

分子の有理化

$$=\lim_{h\to0}\frac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$$

h を約分

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$$

0代入

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

練習１） 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について，$x=1$ における微分係数を定義に従って求めよ。

解答　$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-(1+h)}{h(1+h)}=\lim_{h\to0}\frac{-1}{1+h}=-1$$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}\right)$$ と見てもよい

□微分可能と連続

極限値が存在

関数 $f(x)$ について，次のことが成り立つ。

> **微分可能と連続**
>
> 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である。

【証明】$x \fallingdotseq a$ のとき　$f(x)-f(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$　$\cdots$ ①

極限値が存在

ここで，関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$　である。

また　$\displaystyle\lim_{x\to a}(x-a)=0$　であるから，

① より　$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}=f'(a)\cdot 0=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である。 終

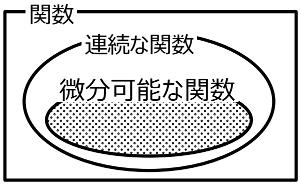
> $x=a$ で連続 $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$
>
> $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$
>
> の逆をたどる

「**関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $x=a$ で連続**」であるが，この**逆は成り立たない**。

すなわち，「関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$x=a$ で微分可能であるとは限らない。」

グラフが $x=a$ でつながっていても，その点における接線が存在しないような関数 $f(x)$ がある。

> 視覚的には
> $y=f(x)$ が $x=a$ で
> **滑らか**でなくてはいけない
> ということ



例２）　関数の連続と微分可能

関数 $f(x)=|x|$ について，

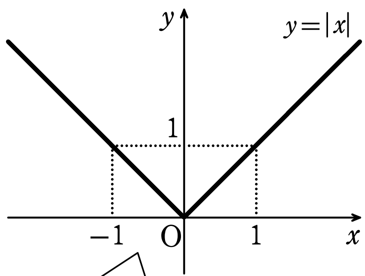
$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

> $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$，$f(0)=0$

が成り立つから，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

一方，$f(x)=|x|$ について

$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$　$\cdots\cdots$ ①　である。



> **滑らか**でない
> $\Rightarrow x=0$ での接線の傾きが一定しない
> （$x=0$ で接線が引けない）

ここで　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to+0}1=1$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to-0}(-1)=-1$

であるから，$h\longrightarrow 0$ のときの ① の極限はない。

> **←右側極限と左側極限が異なるため**

よって，関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でない。終

> 「絶対値を含むとき」と安直に判断しないこと
> （$y=|x^3|$ は $x=0$ で微分可能）

微分法【導関数】　p.73

□導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で微分可能であるとき，$f(x)$ はその **区間で微分可能** であるという。関数 $f(x)$ が，ある区間で微分可能であるとき，その区間の各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，1 つの新しい関数が得られる。この関数を，$f(x)$ の **導関数** といい，記号 $f'(x)$ で表す。 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で定義される。

$f(x)$ の導関数　　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

注意 関数 $y=f(x)$ の導関数を，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などの記号でも表す。

関数 $y=f(x)$ において，x の変化量を表すのに，h の代わりに記号 Δx を用いることがある。Δx を x の 増分 という。このとき，Δx に対応する y の変化量 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を Δy で表し，これを y の増分という。 増分を用いると，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で表される。

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

厳密には「開区間」のこと。閉区間では区間の端での微分係数は考えない。

＊閉区間 $[a,b]$ における微分可能性は，$x=a$ においては右側微分係数の存在，$x=b$ においては左側微分係数の存在で定義することもあるが，高校数学の範囲外なので扱わない。

例３） 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

練習３） 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$　　(2) $f(x)=\sqrt{x}$　定義域は $x\geqq 0$

解答

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{2(x+h)}-\dfrac{1}{2x}\right\}$　$\dfrac{0}{0}$ の不定形

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{x-(x+h)}{2(x+h)x}\right\}$　通分

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-1}{2(x+h)x}$　$h=0$ 代入

$=-\dfrac{1}{2x^2}$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$　$\dfrac{0}{0}$ の不定形

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$　有理化

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$　$h=0$ 代入

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　定義域は $x>0$ （一致しない！）
→区間で微分可能としている