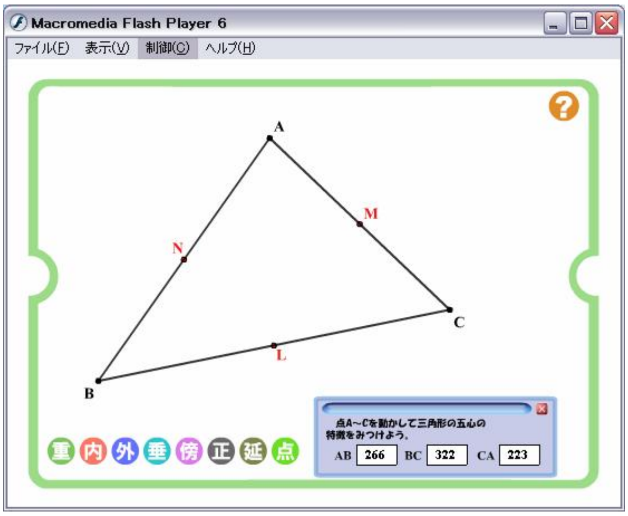
# 五心へのアプローチ

札幌新川高等学校　吉田 奏介

数学Ｉの授業のあと、生徒から「内心や外心と頂点の延長線は中点と一致しないんですか？」と質問があった。その生徒には角の二等分線の話や鈍角三角形のときの話をしたら納得していたが、確かに一般的な点におけることは紙面上の図を見ただけではわかりづらいだろうし、生徒が自分で描く図は都合のよい図を描いてしまいがちである。そんなことを発端にして考えてみた。

## 1 FLASH 教材の概要




特徴としては

- 三角形の頂点を動かすことができる
- 五心を表示できる
- 内接円、外接円も表示される
- 各点の座標、三角形の辺の長さが表示できる
- 正三角形にできる
- 延長線が表示できる

といったことが可能である。これにより、前述したような一般的に成り立つ図形の性質を示すことができる。また「重心と内心が一致するならば正三角形である」ということを、実験により体験、証明へといった流れで確認していくことも可能となる。

## 2 数学とＦＬＡＳＨ

ＦＬＡＳＨでこのような自由に動かす教材を作る際、アニメーションを作るわけではなく、そのほとんどが「アクション」と呼ばれるプログラム（コード）を打ち込むことでできあがっていく。下がその一例である。

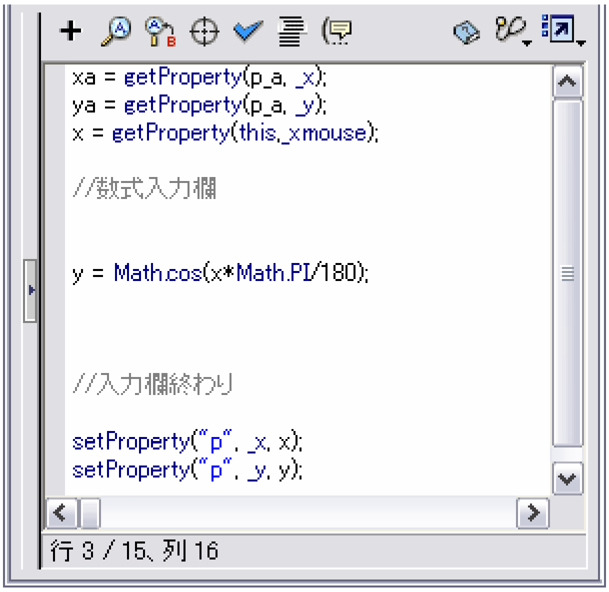
```
//　延長線
  bc = (yc-yb)/(xc-xb);
  mbc_ra = Math.atan(mbc)*180/Math.PI;
  setProperty("entyou_a",_rotation, mbc_ra);
  setProperty("entyou_a", _x, p_l_x);
  setProperty("entyou_a", _y, p_l_y);

//　辺の長さ
  a_l2 = (xc-xb)*(xc-xb)+(yc-yb)*(yc-yb);
  a_l = Math.sqrt(a_l2);
  a_lin = Math.round(a_l);
```

```
//　sin cos
  cosa = (b_l*b_l+c_l*c_l-a_l*a_l)/(2*b_l*c_l);
  sina = Math.sqrt(1-cosa*cosa);
  cosb = (-b_l*b_l+c_l*c_l+a_l*a_l)/(2*a_l*c_l);
  sinb = Math.sqrt(1-cosb*cosb);
  cosc = (b_l*b_l-c_l*c_l+a_l*a_l)/(2*b_l*a_l);
  sinc = Math.sqrt(1-cosc*cosc);
//　外心
  xo = (xa*sin2a+xb*sin2b+xc*sin2c)/(sin2a+sin2b+sin2c);
  yo = (ya*sin2a+yb*sin2b+yc*sin2c)/(sin2a+sin2b+sin2c);
  o_r = a_l/sina;
  setProperty("p_o", _x, xo);
  setProperty("p_o", _y, yo);
  setProperty("gaishinen", _x, xo);
  setProperty("gaishinen", _y, yo);
  setProperty("gaishinen", _width, o_r);
  setProperty("gaishinen", _height, o_r);
```

独特な部分もあるが、何となく何をしているかわかる部分もあるのではないだろうか。この中の数値処理自体は Mathematica などに近いものがある。

そこで、ある程度の知識があれば数学と情報の練習もかねて用いてもおもしろいのではないだろうか。これはある程度の下準備のされたファイルと FLASH のアプリケーションがあれば計算処理の結果をグラフなどで視覚的に表示することが可能となると思われる。

環境が許せば、できあがったものをいじ、るだけでなく自分で作り、なおかつ数学の仕組みもちょっとかませた e-learnig などというのもありなのではないだろうか。




## 3 五心の座標とＦＬＡＳＨ

さてまた先程の「アクション」の中に戻ると次のような部分がある。

```
//　外心
  xo = (xa*sin2a+xb*sin2b+xc*sin2c)/(sin2a+sin2b+sin2c);
  yo = (ya*sin2a+yb*sin2b+yc*sin2c)/(sin2a+sin2b+sin2c);
```

これは処理上で五心を座標で設定する必要があるために設定しているのだが、これがなかなか大変である。まず実際に五心を座標で表現すると次のようになる。

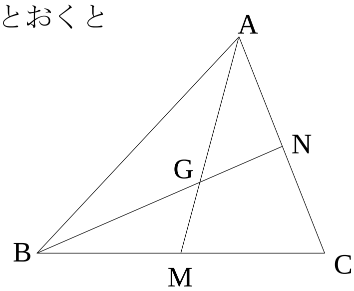
三角形の頂点を $A(X_1, Y_1)$, $B(X_2, Y_2)$, $C(X_3, Y_3)$ とすると

| | | |
|---|---|---|
| 重心 | $\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}, \dfrac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}\right)$ | |
| 内心 | $\left(\dfrac{aX_1+bX_2+cX_3}{a+b+c}, \dfrac{aY_1+bY_2+cY_3}{a+b+c}\right)$ | $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$ |
| 傍心 | $\left(\dfrac{-aX_1+bX_2+cX_3}{-a+b+c}, \dfrac{-aY_1+bY_2+cY_3}{-a+b+c}\right)$ | $r=\dfrac{2S}{-a+b+c}$ |
| | $\left(\dfrac{aX_1-bX_2+cX_3}{a-b+c}, \dfrac{aY_1-bY_2+cY_3}{a-b+c}\right)$ | $r=\dfrac{2S}{a-b+c}$ |
| | $\left(\dfrac{aX_1+bX_2-cX_3}{a+b-c}, \dfrac{aY_1+bY_2-cY_3}{a+b-c}\right)$ | $r=\dfrac{2S}{a+b-c}$ |
| 外心 | $\left(\dfrac{X_1\sin 2A+X_2\sin 2B+X_3\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}, \dfrac{Y_1\sin 2A+Y_2\sin 2B+Y_3\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\right)$ | $R=\dfrac{a}{2\sin A}$ |
| 垂心 | $\left(\dfrac{X_1\tan A+X_2\tan B+X_3\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}, \dfrac{Y_1\tan A+Y_2\tan B+Y_3\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\right)$ | $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$ |

**この証明はベクトルを用いることで次のように導かれる。**

**重心**

$$\overrightarrow{AG}=s\overrightarrow{AM}=s\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right),\quad \overrightarrow{BG}=s\overrightarrow{AN}=t\left(\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}}{2}\right)$$ とおくと



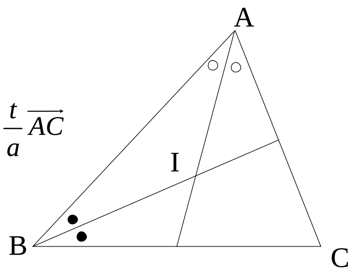

$$\vec{g}-\vec{a}=s\left\{\frac{\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\vec{c}-\vec{a}\right)}{2}\right\}\qquad \therefore \vec{g}=\left(1-s\right)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b}+\frac{s}{2}\vec{c}$$

$$\vec{g}-\vec{b}=t\left\{\frac{\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{2}\right\}\qquad \therefore \vec{g}=\frac{t}{2}\vec{a}+\left(1-t\right)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$$

$1-s=\frac{t}{2}$, $\frac{s}{2}=1-t$, $\frac{s}{2}=\frac{t}{2}$ より $s=t=\frac{2}{3}$ $\qquad\therefore\ \vec{g}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

**内心**

$$\overrightarrow{AI}=s\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\frac{s}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{s}{b}\overrightarrow{AC}\quad \sim①$$




$$\overrightarrow{BI}=t\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c}+\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)=-\frac{t}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{a}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{a+c}{ac}t\overrightarrow{AB}+\frac{t}{a}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\left(1-\frac{a+c}{ac}t\right)\overrightarrow{AB}+\frac{t}{a}\overrightarrow{AC}\ \sim②$$

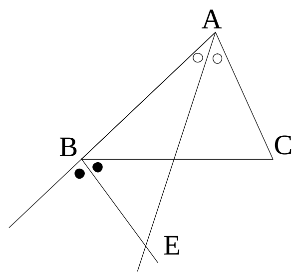
①②より $\frac{s}{c}=1-\frac{a+c}{ac}t$, $\frac{s}{b}=\frac{t}{a}$ 　これを解くと $s=\frac{bc}{a+b+c}$, $t=\frac{ac}{a+b+c}$

①に代入して $\overrightarrow{AI}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$

$$\vec{i}-\vec{a}=\frac{b}{a+b+c}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{c}{a+b+c}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\qquad \therefore\ \vec{i}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$$

**傍心**

$$\overrightarrow{AE}=s\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\frac{s}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{s}{b}\overrightarrow{AC}\quad \sim①$$




$$\overrightarrow{BE}=t\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c}-\frac{\overrightarrow{BA}}{a}\right)=\frac{t}{a}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{t}{c}\overrightarrow{AB}=\frac{a-c}{ac}t\overrightarrow{AB}+\frac{t}{a}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\left(1+\frac{a-c}{ac}t\right)\overrightarrow{AB}+\frac{t}{a}\overrightarrow{AC}\ \sim②$$

①②より $\frac{s}{c}=1+\frac{a+c}{ac}t$, $\frac{s}{b}=\frac{t}{a}$ 　これを解くと $s=\frac{bc}{-a+b+c}$, $t=\frac{ac}{-a+b+c}$

①に代入して $\overrightarrow{AE}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{-a+b+c}$

$$\vec{e}-\vec{a}=\frac{b}{-a+b+c}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{c}{-a+b+c}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\qquad \therefore\ \vec{e}=\frac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c}$$

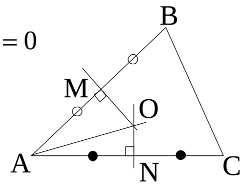
同様にして他の傍心も導くことが可能

**外心**

$\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とする

$MO\perp AB$ より　$\overrightarrow{MO}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0$

$$\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right\}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(s-\frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+t\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(s-\frac{1}{2}\right)c^2+t\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}=0$$




$NO\perp AC$ より　$\overrightarrow{NO}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AC}=0$

$$\left\{s\overrightarrow{AB}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}\right\}\bullet\overrightarrow{AB}=s\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=s\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\left(t-\frac{1}{2}\right)b^2=0$$

$$\left(s-\frac{1}{2}\right)c^2+tbc\cos A=0\ ,\quad sbc\cos A+\left(t-\frac{1}{2}\right)b^2=0$$

$c^2s+(bc\cos A)t=\frac{1}{2}c^2$ , $(bc\cos A)s+b^2t=\frac{1}{2}b^2$　より　$\begin{pmatrix} c^2 & bc\cos A \\ bc\cos A & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c^2 \\ \frac{1}{2}b^2 \end{pmatrix}$

ここで　$D=b^2c^2-b^2c^2\cos^2 A=b^2c^2\left(1-\cos^2 A\right)=b^2c^2\sin^2 A=4\times\left(\frac{bc\sin A}{2}\right)^2=4S^2$ なので

$$S=\frac{b^2c^2-b^3c\cos A}{8S^2}=\frac{b^2\left(2c^2-2bc\cos A\right)}{16S^2}=\frac{b^2\left\{2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right\}}{16S^2}=\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16S^2}$$

同様にして $t=\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16S^2}$ となるので　$\overrightarrow{AP}=\frac{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16S^2}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16S^2}\overrightarrow{AC}$

$$\vec{p}=\frac{1}{16S^2}\left[\left\{16S^2-b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right\}\vec{a}+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)\vec{b}+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\vec{c}\right]$$

$$\begin{aligned}16S^2-b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)&=16\left(\frac{ac\sin B}{2}\right)^2-b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)-c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\\&=4a^2c^2\left(1-\cos^2 B\right)-a^2c^2-a^2b^2-2b^2c^2+b^4+c^4\\&=4a^2c^2-\left(2ac\cos B\right)^2-a^2c^2-a^2b^2-2b^2c^2+b^4+c^4\\&=3a^2c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2-a^2b^2-2b^2c^2+b^4+c^4\\&=a^2b^2+a^2c^2-a^4\\&=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)\end{aligned}$$

であるから　$\vec{p}=\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)\vec{a}+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)\vec{b}+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\vec{c}}{16S^2}$

$$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)=a^2\left(2bc\cos A\right)=2\cdot a\cdot abc\cos A=2\cdot 2R\sin A\cdot abc\cos A=2Rabc\sin 2A$$

同様に　$b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)=2Rabc\sin 2B,\ c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)=2Rabc\sin 2C$

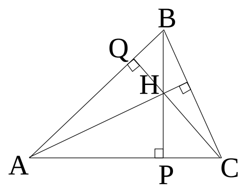
**外心**
**つづき**

$$2Rabc\left(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\right)=a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)$$
$$=-\left\{a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+\left(b+c\right)^2\left(b-c\right)^2\right\}$$
$$=-\left\{a^2-\left(b+c\right)^2\right\}\left\{a^2-\left(b-c\right)^2\right\}$$
$$=-\left(a-b-c\right)\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)$$
$$=\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)$$
$$=16S^2 \quad \because \text{Heron の公式}$$

であるから

$$\vec{p}=\frac{2Rabc\sin 2A\cdot\vec{a}+2Rabc\sin 2A\cdot\vec{b}+2Rabc\sin 2A\cdot\vec{c}}{2Rabc\left(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\right)}$$
$$=\frac{\vec{a}\sin 2A+\vec{b}\sin 2A+\vec{c}\sin 2A}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

**垂心**




$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とする $\overrightarrow{AP}=\dfrac{b\cos A}{c}\overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AP}=\left(s-\frac{b\cos A}{c}\right)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{PH}\bullet\overrightarrow{AB}=\left\{\left(s-\frac{b\cos A}{c}\right)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right\}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(s-\frac{b\cos A}{c}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+t\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}=0$$

$\left(s-\dfrac{b\cos A}{c}\right)c^2+\left(bc\cos A\right)t=0$ なので $c^2s+\left(bc\cos A\right)t=bc\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ ～①

同様に $\overrightarrow{QH}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(bc\cos A\right)s+\left(t-\dfrac{c\cos A}{b}\right)b^2=0$

なので $\left(bc\cos A\right)s+b^2t=bc\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ ～②

①②より $\begin{pmatrix} c^2 & bc\cos A \\ bc\cos A & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} \end{pmatrix}$ とできるので外心と同様に

$$S=\frac{b^2\left(b^2+c^2-a^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)bc\cos A}{8S^2}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(2b^2-2bc\cos A\right)}{16S^2}$$
$$=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left\{2b^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right\}}{16S^2}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{16S^2}$$

$t=\dfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)}{16S^2}$ より $\overrightarrow{AP}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{16S^2}\left\{\left(a^2+b^2-c^2\right)\overrightarrow{AB}+\left(c^2+a^2-b^2\right)\overrightarrow{AC}\right\}$

$$\vec{h}=\frac{1}{16S^2}\left[\begin{array}{l}\left\{16S^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\right\}\vec{a} \\ \qquad +\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\vec{b}+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\vec{c}\end{array}\right]$$

垂心 つづき

ここで$\vec{a}$の係数に注目すると

$$16S^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)\left\{\left(a^2+b^2-c^2\right)+\left(c^2+a^2-b^2\right)\right\}=16\left(\frac{ac\sin B}{2}\right)^2-2a^2b^2-2c^2a^2+2a^4$$
$$=4a^2c^2\left(1-\cos^2 B\right)-2a^2b^2-2c^2a^2+2a^4$$
$$=4a^2c^2-\left(2ac\cos B\right)^2-2a^2b^2-2c^2a^2+2a^4$$
$$=2a^2c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2-2a^2b^2+2a^4$$
$$=a^4-b^4-c^4+2b^2c^2=a^4-\left(b^2-c^2\right)^2$$
$$=\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

であるから

$$\vec{h}=\frac{\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\vec{a}+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\vec{b}+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\vec{c}}{16S^2}$$

$$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=2ac\cos B\cdot 2bc\cos A=4\cdot a\cdot abc\cos A\cos B$$
$$=4\cdot 2R\sin A\cdot abc\cos A\cos B=8Rabc\sin A\cos A\cos B$$
$$=8Rabc\tan A\cos A\cos B\cos C$$

同様に　$\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=8Rabc\tan B\cos A\cos B\cos C$

$$\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)=8Rabc\tan C\cos A\cos B\cos C$$

$$8Rabc\cos A\cos B\cos C\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)$$
$$=\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)+\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)$$
$$=-a^4+2\left(b^2+c^2\right)a^2-b^4+2b^2c^2-c^4$$
$$=-\left\{a^4-2\left(b^2+c^2\right)a^2+\left(b^2-c^2\right)^2\right\}$$
$$=-\left\{a^2-\left(b-c\right)^2\right\}\left\{a^2-\left(b+c\right)^2\right\}$$
$$=-\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a-b-c\right)\left(a+b+c\right)$$
$$=\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a+b+c\right)$$
$$=16S^2$$

$$\vec{h}=\frac{\vec{a}\cdot 8Rabc\tan A\cos A\cos B\cos C+\vec{b}\cdot 8Rabc\tan B\cos A\cos B\cos C+\vec{c}\cdot 8Rabc\tan C\cos A\cos B\cos C}{8Rabc\cos A\cos B\cos C\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)}$$
$$=\frac{\vec{a}\tan A+\vec{b}\tan B+\vec{c}\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$$

重心、内心、傍心は出しやすいが、外心や垂心はいろいろと変換していかなければならず、神奈川県元石川高校の星野敏司氏のホームページ[*1]を参考に計算を行った。この計算自体は図形の性質以外に、ベクトルや三角比、面積公式を用いており、数学 A の範囲では扱うことができない。しかし数 IIB 以降であれば複数の単元に渡った演習問題としてはおもしろいものであるし、なにより非常に美しい対称性・関連性をもっておる。ちょっと示すだけでも、それらを感じさせることができるものではないだろうか。

---

＊1　Meta$^2$mathematician ’ s HP (http://www.nn.iij4u.or.jp/~hsat/index.shtml)