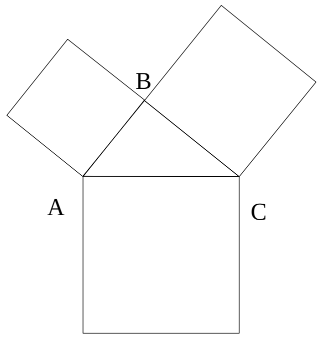
余弦定理へのアプローチ

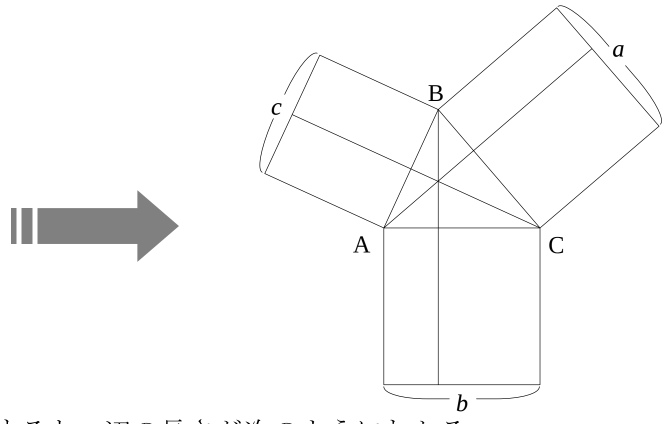
札幌新川高等学校　吉田 奏介

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ は三角形の解法やベクトルなどの場面で目にすることの多い定理の一つです。式自体も三平方の定理 $a^2 = b^2 + c^2$ と非常に近い形をしているのも特徴的です。しかし実際証明しようとすると式変形中心で導かれることがおおいもの。そこで、より図形的に、より直感的に処理できないだろうか？というのが今回の出発点です。

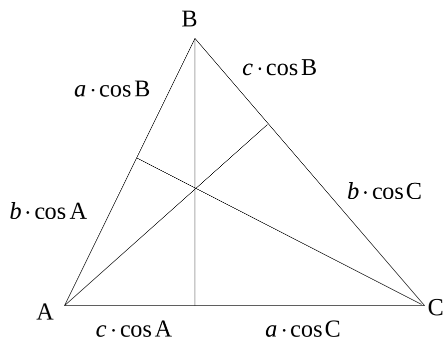
1 図形上のポイント

三平方の定理といえば左下のような図を思い浮かべることが多いのではないだろうか。そこで今後は∠B を鋭角にして各頂点から対辺に垂線を下ろした右下の図で考えることとする。（今回は証明も鋭角のみを記す）

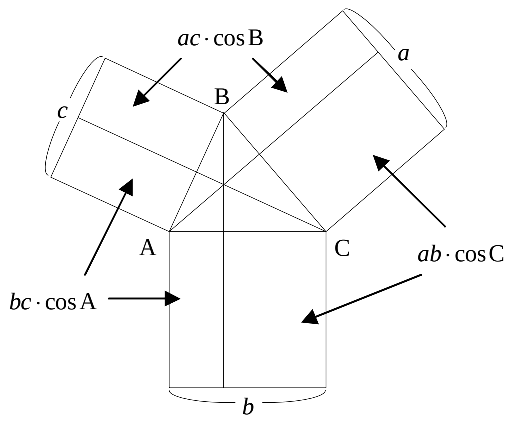




△ABC 内にできた直角三角形に注目すると、辺の長さが次のようにわかる。



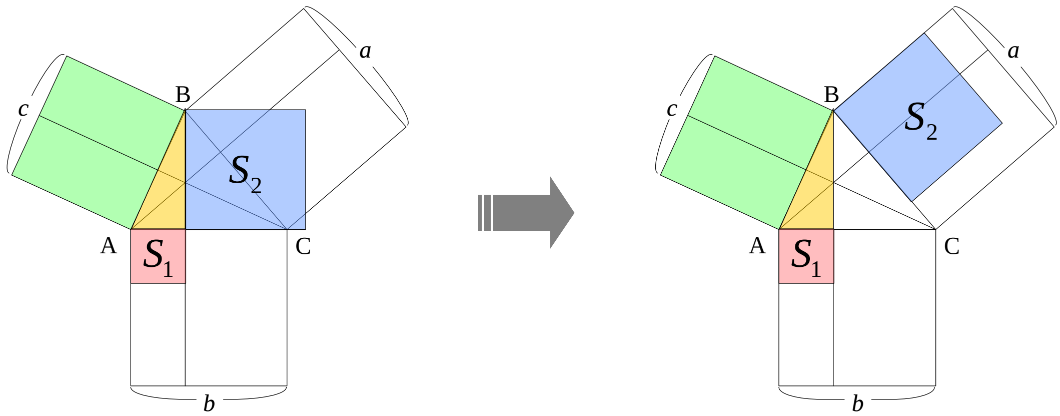
ここで辺の長さに注目すると第１余弦定理が示されることになるが、今回はあくまでも第２余弦定理を図で示すことが目的なので、もう一度三平方もどきの図に戻ろう。すると正方形を分割することで生じた長方形の面積がわかり、なおかつ等しい面積となることがわかる。では、このことをふまえて、次から証明していくこととする。



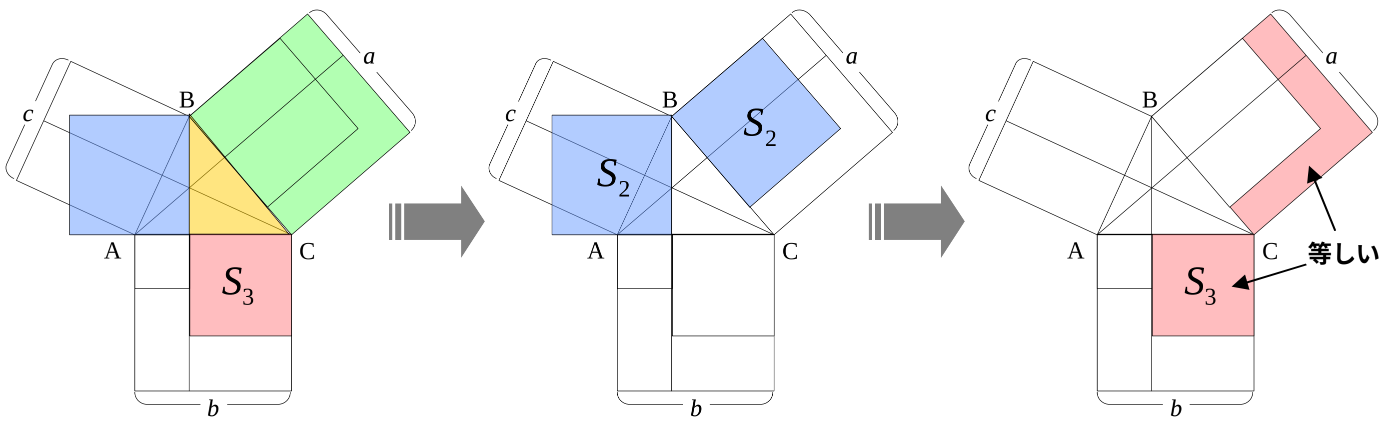
2 図からの証明　その１

　これは三平方の定理の図を用いた証明であるが、黒板など机上で証明するにはやや大変なものであるので授業で用いるには不向きではある。しかし動画としてのインパクトは強くおもしろいものなので紹介したい。

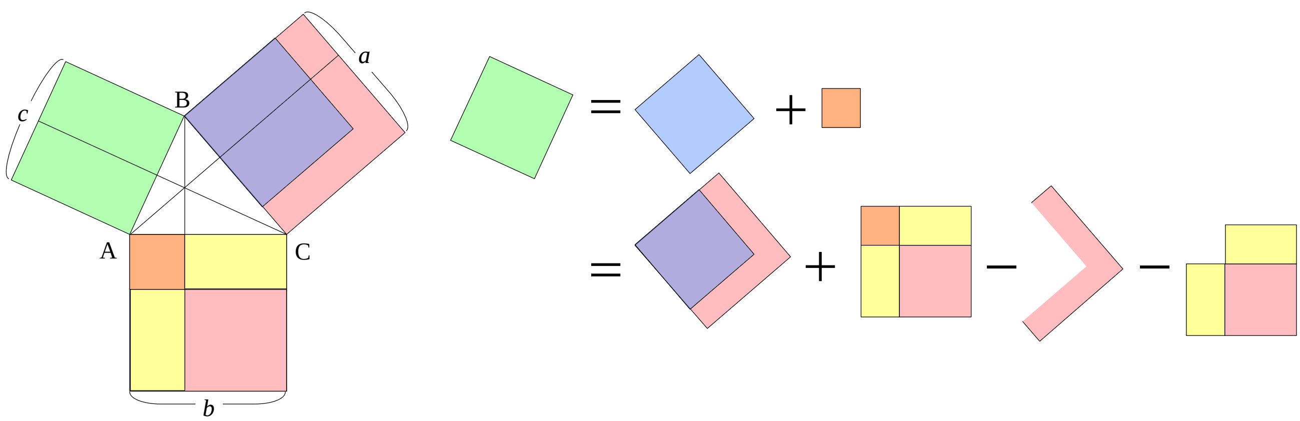
　まず分割した三角形のなかで直角三角形となるものを一つ選び、三平方の定理を用いると左下の図のようになる。その正方形のうちの一つ(S_2)を回転させ一辺 a の正方形と辺をそろえる。



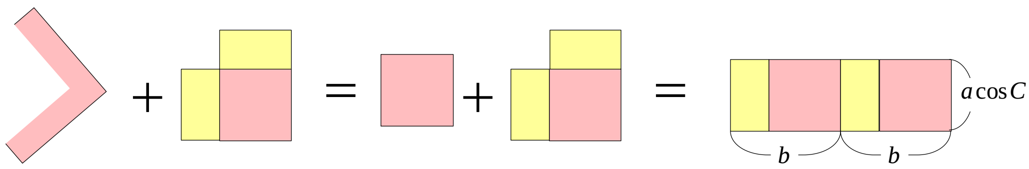
　次に、今用いた直角三角形に対になる三角形に注目し三平方の定理を用いる。すると先程の工程で出てきた正方形 S_2 と等しいものがあることがわかる。さらに、 $a^2 = S_2 + S_3$ 　より　$a^2 - S_2 = S_3$ であることがわかる。



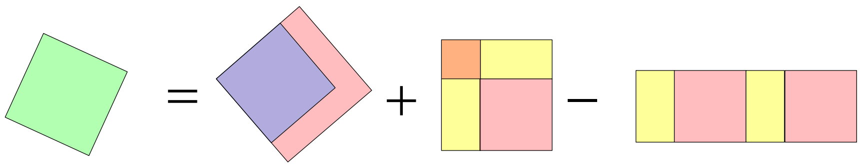
　S_3 を平行移動させできる図において、次のことがいえる。



ここで前段までの作業から $a^2 - S_2 = S_3$ であることがわかっているので



整理すると

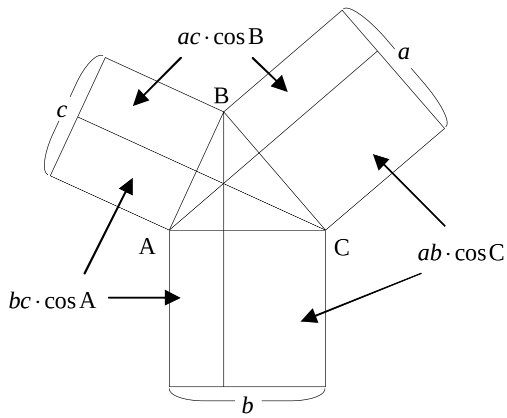


ゆえにこれを式にすると　$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$　である。

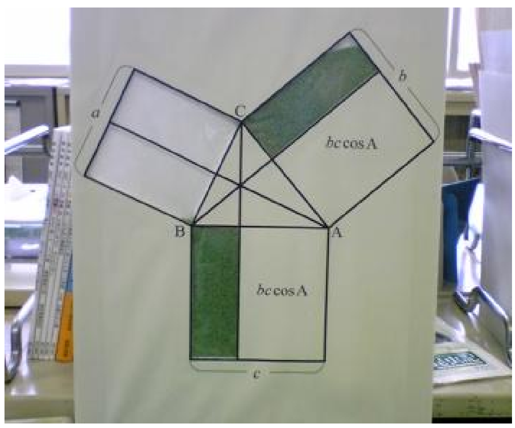
3 図からの証明　その２

図形上のポイントでわかったように同じ面積の部分があるということに注目すると、次のようにできる。

> $a^2 = ac\cos B + ab\cos C$　〜①
>
> であり、b^2 , c^2 の正方形については
>
> $ab\cos C = b^2 - bc\cos A$,　$ac\cos B = c^2 - bc\cos A$　〜②
>
> と見ることができる。
>
> ここで①に②を代入すると
>
> $$a^2 = \left(b^2 - bc\cos A\right) + \left(c^2 - bc\cos A\right)$$
> $$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
>
> である。



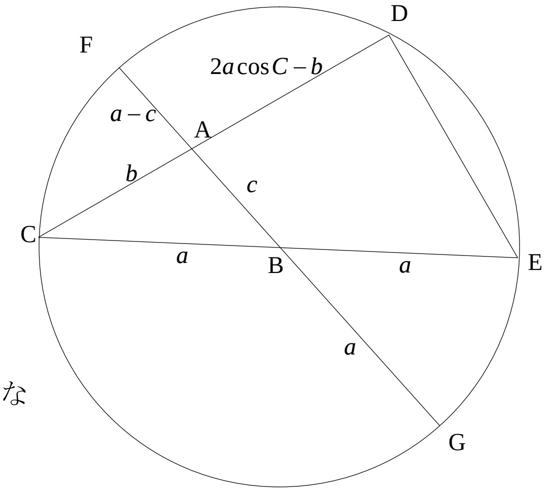
証明としてもシンプルなものとなったが、これは動画や実物の教具によって直感的に理解を図ることでより理解が促進されると思われる。特に実物の教具の方はインパクトも強く、自分たちが動かすことで等積であることが一目でわかるものになっている。ちなみに動画は動画作成ソフト（フラッシュ）で、教具は岩手の下町壽男氏が作られた教具の写真をもとに作成してみた。



4 図からの証明　番外

最後に三平方の定理からはなれて、違う図形からのアプローチをしてみよう。

中心 B 半径 a の円で考える。直径の円周角は直角となるので△CDE は直角三角形となる。さらにその直角三角形を横切る形で直径を加え、各辺と頂点に名前を付ける。この際、△CDE は直角三角形であるから $\mathrm{CD}=2a\cdot\cos C$ であるので各辺の長さは図のようになる



ここで方べきの定理を用いると、

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{AG}\cdot\mathrm{AF}$$

であることから

$$(2a\cos C-b)b=(a+c)(a-c)$$
$$2ab\cos C-b^2=a^2-c^2$$
$$\therefore\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

このように面積以外からも多少の式変形でシンプルな証明を得られた。

直感的にとらることは証明への敷居を低くする一つの手ではないでしょうか。今回このように余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$　を調べてみて、ここに紹介できなかったものもまだ多くあり、色々なアプローチの仕方が考えられる題材でした。中でも実際の教具による証明は視覚だけでなく、耳や実際に手にとって考えられるもので非常におもしろい提示方法だと思いました。

参考文献

あなたの脳を目覚めさせる美しい数学　Yoshita　2007 星の環会

眺めて愉しむ数学　証明の展覧会 I　Roger B. Nelsen　2002　東海大学出版会

研究と実践　９８号　2007　数学教育協議会