複素数平面をやってみて

１４．０６．０７
八雲高等学校
吉田　奏介

■事の発端

今年度３年ぶりに数学Ⅲを担当することとなった。そこで個人的にも学習指導要領的にも久々ということで、そのあたりの感想などをまとめてみた。

■ちなみに…本校の数学Ⅲ選択状況

ここ数年は国公立大学にも進学する生徒もおり進路指導と部活動などの両立が求められている状況である。その中で数学Ⅲ選択生は

平成２０年度	３人
平成２１年度	７人
平成２２年度	４人
平成２３年度	４人
平成２４年度	４人
平成２５年度	８人
平成２６年度	２人

となっており、特に今年度は少ない人数での開講となってしまった。ただそこは少人数指導としてきめ細かい指導につなげられればと考えている。

■教科書での複素数平面の扱いについて

本校では数研出版新編の教科書を用いているのでそこでの比較となるが、旧指導要領「数学Ｂ」での扱いと現指導要領「数学Ⅲ」での扱いを比較してみようと思う。[(＊１(＊２]

まず具体的な指導目標は次のようになっている。

旧指導要領「数学Ｂ」	現指導要領「数学Ⅲ」
具体的な指導目標 1. 複素数を、複素数平面上の点として表示し、複素数の性質を幾何的に扱うことにより、その理解を深めさせる。 2. 複素数の極形式を導入し、複素数が絶対値と偏角によって表されることを理解させる。 3. 複素数の四則演算のもつ幾何学的意味を明らかにする。 4. ド・モアブルの定理について指導し、二項方程式の解法などを通して、複素数の有効性を理解させる。 5. 複素数平面上の図形に関する種々の応用を通して、複素数の有用性を理解させる。	具体的な指導目標 1. 複素数の図表示として複素数平面を導入する。複素数の性質と図形的な意味を対応させられるようにする。 2. 複素数 $a+bi$ の別な表し方として、極形式を導入する。そして、複素数の積・商の図形的な意味を明らかにする。 3. 極形式の応用として、ド・モアブルの定理を示し、さらに複素数の n 乗根を求めたりする。 4. 図形への応用として、線分の内分点・外分点を表す複素数を求めたり、２直線のなす角などを複素数で考察する。また、円、直線を z の方程式で表す

次に指導内容一覧と時間対応表を比べてみる。

旧指導要領「数学Ｂ」

	項　目	指　導　内　容	用　語	配当時間
第４章　複素数平面（15時間）	１．複素数平面	複素数平面 共役な複素数の性質 複素数の絶対値とその性質 加法・減法と平行移動 実数倍	実部、虚部、複素数平面、実軸、虚軸、点 z 、絶対値、平行移動	3
	２．複素数の極形式	極形式の導入 複素数の極形式 乗法・除法 複素数の積と図形	極形式、偏角	3
	３．ド・モアブルの定理	ド・モアブルの定理 １の３乗根 １のｎ乗根 複素数のｎ乗根	ド・モアブルの定理、ｎ乗根	3
	４．平面図形と複素数	線分の内分点・外分点 ２点間の距離 ２直線のなす角 ３点が同じ直線上にある条件 ２直線の垂直条件 等式を満たす点の描く図形		5
	問題			1
1	演習問題			1

現指導要領「数学Ⅲ」

	項　目	指　導　内　容	用　語	配当時間
第１章　複素数平面（18時間）	１．複素数平面	複素数平面 複素数の絶対値 複素数の和、差の図示 複素数の実数倍 共役な複素数の性質	複素数平面、複素平面、実部、虚部、実軸、虚軸、$\mathrm{P}(z)$、点 z 、 $\bar{z}$ 、共役複素数、絶対値、 $\lvert z\rvert$	4
	２．複素数の極形式	極形式 極形式で表された複素数の 　積と商 原点を中心とする回転	極形式、偏角、 $\arg z$	4
	３．ド・モアブルの定理	ド・モアブルの定理 複素数のｎ乗根	ド・モアブルの定理、ｎ乗根	3
	４．複素数と図形	線分の内分点・外分点 方程式の表す図形 図形への応用		4
	補充問題			1
	章末問題			2

数学Ⅲの指導書にも「さて、複素数平面は、平成６年度から始まった学習指導要領では数学Ｂの内容として高校数学に復活したが、平成１５年度から始まった学習指導要領では扱われることがなかった。そして今回再び復活したものである。そのため、教科書の内容としては、前回の内容がほぼそのまま扱われていると言っても過言ではない」（*3 とあるように、指導書の指導内容として明記されてなくても

教科書に載っているものもあり確かに同じような内容であるだろう。
その中でも大きな違いといえば、
1. 数学Ｂが度数法であるのに対し、数学Ⅲでは弧度法
2. 新編教科書では「３点が同じ直線上にある条件」「２直線の垂直条件」はコラムへ
といったことであろうか。

■実際の指導について

先述したように今年度は受講人数が少ないため、授業中の状況がよく見える反面、中盤以降はやや時間をかけてしまう場面が多かった。実際の授業進度は次のようになっている。

項　目	指　導　内　容	配当時間	実施時間
１．複素数平面	複素数平面 複素数の絶対値 複素数の和、差の図示 複素数の実数倍 共役な複素数の性質	４	2.5
２．複素数の極形式	極形式 極形式で表された複素数の積と商 原点を中心とする回転	４	２
３．ド・モアブルの定理	ド・モアブルの定理 複素数のｎ乗根	３	2.5
４．複素数と図形	線分の内分点・外分点 方程式の表す図形 図形への応用	４	3.5
補充問題		１	１
章末問題		２	１

極形式については三角関数の加法定理と絡めながら指導していった。また範囲外ではあるがオイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて指数の話に持って行くことで偏角の話をスムーズに持って行くことができると思われる。
「３．ド・モアブルの定理」では二項方程式の解法を複数行ったため、「４．複素数と図形」では３点が同じ直線上にある条件、２直線の垂直条件、三角形の相似、 $z=x+yi$ への置き換えによる解法などを扱ったため時間を必要とした。置き換え自体は最終手段としての指導であるが見慣れた形で考えることができる点では有用だろう。
また指導上の工夫としては前述したように人数が少ないこともあり掲示物を大きく作る必要もないので、別紙のようなマグネット付きの掲示物をＡ３サイズで作ることで前時の復習などに利用した。

■指導してみての工夫と課題

・指導順
教科書は「複素数平面」「式と曲線」「関数」「極限」「微分法」「微分法の応用」「積分法とその応用」と並んでいる。前年度から前倒しができるのならば別だが年度初めから実施するのであれば順番を変更するのも一つの手段であろう。微積を先に行うことでそちらの演習時間を少しでも多くとる事も可能かもしれない。

・弧度法と度数法

旧学習指導要領では度数法、現学習指導要領では弧度法による表示となっている。したがって過去の入試問題は次のように度数法で表記されているので場合によっては修正するなど必要であろう。

◎北海道大学　1996 年　理系

n を自然数とし，θ は $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\cdots\cdots(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$ を満たすものとする．

(1)　このような θ は，$0° < \theta \leqq 360°$ の範囲内に何個存在するか．

(2)　(1) で存在する θ の最小値を θ_n とし

$z_n = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots\cdots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ とおく．

z_n が純虚数となるときの n の値と，そのときの z_n を求めよ．

◎北海道大学　2000 年　文系理系共通

複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\omega)$，$\mathrm{C}(\omega^2)$ を原点 O の周りに 60° 回転した点をそれぞれ A'，B'，C' とする（ここで $\omega = \cos 120° + i\sin 120°$）．

(1)　A'，B'，C' を表す複素数を求めよ．

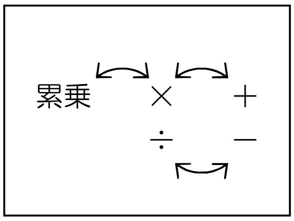
(2)　三角形 ABC と $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ の一方の三角形の各辺はもう一方の三角形の辺との交点によって 3 等分されていることを示せ．

・実軸、虚軸

教科書は実部、虚部（実数）を軸に取る形であるため、軸に x, y と添えている。しかし授業では実軸と虚軸であることを示すために Re と Im とした。この辺は授業者によって見解の違いはあると思われる。

・オイラーの公式

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を証明するにはマクローリン展開を用いる必要も出てくるため扱いとしては範囲外となってしまう。しかし前述したように複素数の積と商やド・モアブルの定理について、「累乗は掛け算、掛け算は足し算、割り算は引き算」と演算の順番と一致する（指数・対数も同様）。そのため教科書の証明も踏まえつつ、感覚的な理解のために利用するのが望ましいのではないか。



・二項方程式の解法

$z^3 = 8i$ といった二項方程式の解法について教科書では（そのままではないが）

z の極形式を　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると　$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3 = 8$, $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$　k は整数

$r > 0$ より $r = 2$

また　$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3} \times 2\pi$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では $k = 0, 1, 2$ であるから　$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$ 、$z = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i$ 、$z = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i$

よって求める解は　$z = \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$

となっている。これはド・モアブルの定理$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$において$n$が整数のときに成立するとしているからである。$n$が整数でないとき複素数の非整数乗が複数の異なる解をもつことから、ド・モアブルの定理のn乗の式が複数解もつことになってくる。nが有理数$\frac{a}{b}$であるとき、b個の解をもつので次のような解法も考えられる。

$z^3=8\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}$　kは整数

$$\begin{aligned}z&=8^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}^{\frac{1}{3}}\\&=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right\}\\&=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k}{3}\times 2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k}{3}\times 2\pi\right)\right\}\end{aligned}$$

$0\leqq\theta<2\pi$の範囲では$k=0,1,2$であるから　$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi$

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$、$z=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}+i$、$z=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-2i$

よって求める解は　$z=\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}+i,-2i$

実際の授業では前者をメインに行ったが、古い参考書では後者で解いてるものもあり、本校の教員でも意見は分かれるものであった。

・図形問題の扱い

「４．複素数と図形」にて、３点が同じ直線上にある条件、２直線の垂直条件、三角形の相似、$z=x+yi$への置き換えによる解法などを追加で行ったが、どこまで授業中に行っておくかも課題となるだろう。特に旧課程で取り上げられていたものについては扱っておいても良いのかもしれない。

・同次式

各項の次数が等しい多項式のことを同次式という。複素数平面の問題で$\frac{\beta}{\alpha}$や$\frac{\alpha}{\beta}$の極形式を求める際に、両辺をα^nやβ^nで割ることにより$\frac{\beta}{\alpha}$や$\frac{\alpha}{\beta}$だけにすることができると、２変数が１変数にでき解の公式などに持ち込めるため用いられる。同次式という単語とともに指導することで、着目する観点が明確になるのではないかと考える。

■入試に向けて

今回複数の研究会で新学習指導要領への対応等についての説明を聞く機会があったので、最後に記載しておきたいと思う。(*4(*5

- 新課程入試ではいずれは入試の中心になる分野。
- 「ド・モアブルの定理の問題」「図形の回転のための利用」「複素数平面上の図形」「複素数平面上の図形の変換」などの問題がある。
- 複素数平面は

●「数」としての複素数（代数的に）

●「点」としての複素数（幾何的に）
●「変換」を表す複素数（幾何的に、今まで行列が担ってきたところ）
に大別できる。１つの問題を解くために複数の見方が必要であり、総合的なものの見方と獲得する適切な題材である。

・具体的な計算において
●z のまま扱う（$\bar{z}$, $|z|$ を利用した計算）
●$z=x+iy$ とおく（$\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ を利用した計算）
●極形式で表す
どの表現をどのタイミングで利用するかを適切に選択する力が必要（すぐに置き換えるのではなく図形的に判断してからなど）。

複素数平面の対策はしっかりと。数ＢからⅢへ移動したので他分野との融合問題も考えられる。

以上、八雲高校で授業をやってみて感じたことでした。まだまだ到らない点もありますが、何か参考なるところがあれば幸いです。

■引用・参考

（＊１：改訂版　高等数学　新編数学Ｂ　〔数Ｂ７０１〕　教授資料　（数研出版　1999 年）
（＊２：新編　数学Ⅲ　〔数Ⅲ３１０〕　教授資料　（数研出版　2013 年）
（＊３：新編　数学Ⅲ　〔数Ⅲ３１０〕　教授資料　（数研出版　2013 年）
（＊４：2013 年度　新課程研究会　分析資料集　数学　（河合塾　２０１４年）
（＊５：数学科教員研修会資料　（数学教育研究所　清　史弘　2014年）

◎北海道大学　1996 年　理系

(1)　(左辺)$=\cos(\theta+2\theta+\cdots\cdots+n\theta)+i\sin(\theta+2\theta+\cdots\cdots+n\theta)$

$$=\cos\frac{n(n+1)}{2}\theta+i\sin\frac{n(n+1)}{2}\theta$$

ゆえに　$\cos\frac{n(n+1)}{2}\theta+i\sin\frac{n(n+1)}{2}\theta=1$

$0°<\theta\leqq 360°$ であるから　$0°<\frac{n(n+1)}{2}\theta\leqq n(n+1)\times 180°$

この範囲で $\frac{n(n+1)}{2}\theta=k\times 360°$ (k は 0 より大きい整数) となる k の個数は

$0°<k\times 360°\leqq n(n+1)\times 180°$ から $0<k\leqq\frac{n(n+1)}{2}$　　よって　$\frac{n(n+1)}{2}$ 個

$\boxed{\text{別解}}$　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると (左辺)$=z\cdot z^2\cdots\cdots z^n=z^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

ゆえに　$z^{\frac{1}{2}n(n+1)}=1$　　よって，z は 1 の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 乗根である．

1 の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 乗根は，次の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の複素数で与えられる．

$$z_k=\cos\left\{\frac{2k}{n(n+1)}\times 360°\right\}+i\sin\left\{\frac{2k}{n(n+1)}\times 360°\right\}\ \left\{k=1, 2, \cdots\cdots, \frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

したがって　$\frac{1}{2}n(n+1)$ 個

(2)　(1) から　$\theta_n=360°\times\frac{2}{n(n+1)}$

また　$z_n=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$

ここで　$\sum_{k=1}^{n}\theta_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}\times 360°=720°\times\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=720°\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{n}{n+1}\times 720°$$

したがって　$z_n=\cos\left(\frac{n}{n+1}\times 720°\right)+i\sin\left(\frac{n}{n+1}\times 720°\right)$

z_n が純虚数となるとき $\frac{n}{n+1}\times 720°=90°+l\times 180°$ (l は負でない整数)

ゆえに　$\frac{8n}{n+1}=1+2l$　　よって　$8-\frac{8}{n+1}=1+2l$

左辺が奇数となるためには $n+1=8$ から $n=7$　　このとき，$1+2l=7$ から $l=3$

したがって　$z_7=\cos 630°+i\sin 630°=\cos 270°+i\sin 270°=-i$

◎北海道大学　2000 年　文系理系共通

$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^2=\cos 240°+i\sin 240°=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

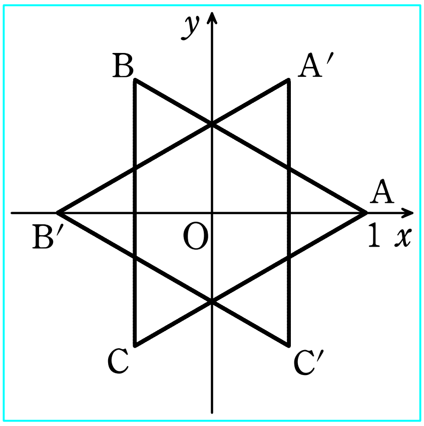
(1)　3 点 A′，B′，C′ を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とおくと

$$\alpha=\cos 60°+i\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\beta=\omega(\cos 60°+i\sin 60°)=\cos(120°+60°)+i\sin(120°+60°)=-1,$$

$$\gamma=\omega^2(\cos 60°+i\sin 60°)=\cos(240°+60°)+i\sin(240°+60°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　辺 AB の 3 等分点のうち，A に近い方の点を D，B に近い方の点を E とする．



D を表す複素数は

$$\frac{2\cdot 1+1\cdot\omega}{1+2}=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

E を表す複素数は

$$\frac{1\cdot 1+2\cdot\omega}{2+1}=\frac{1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

また，辺 A′C′ の 3 等分点のうち，A′ に近い方の点を D′，辺 A′B′ の 3 等分点のうち，A′ に近い方の点を E′ とする．

D′ を表す複素数は

$$\frac{2\cdot\alpha+1\cdot\gamma}{1+2}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

E′ を表す複素数は

$$\frac{2\cdot\alpha+1\cdot\beta}{1+2}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

よって，D と D′，E と E′ は一致する．

ゆえに，辺 AB は三角形 A′B′C′ の辺との交点によって，3 等分される．

このことと図形の対称性から，題意は示された．