

円の接線の幅広い見方についての考察

静岡県立高等学校教諭 石原 諭

円の接線の公式における接点を円外や円内に動かすことにより、接線の公式の持つ意味が広がってくる。ここではその2通りの見方について考察した。

円 $O: x^2 + y^2 = r^2$ および点 $P(x_0, y_0)$ について、方程式 $x_0x + y_0y = r^2$ は

(1) 点 P が円周上にあるときは、点 P における接線の方程式を表す。(これは教科書の公式である。)

(2) 点 P が円の外部にあるときは、点 P から円 O に2本の接線を引き、接点を A, B とするとき、2点 A, B を通る直線の式を表す。

(理由) $A(x_1, y_1)$ における接線の式は $x_1x + y_1y = r^2$ であり、これが点 P を通るので

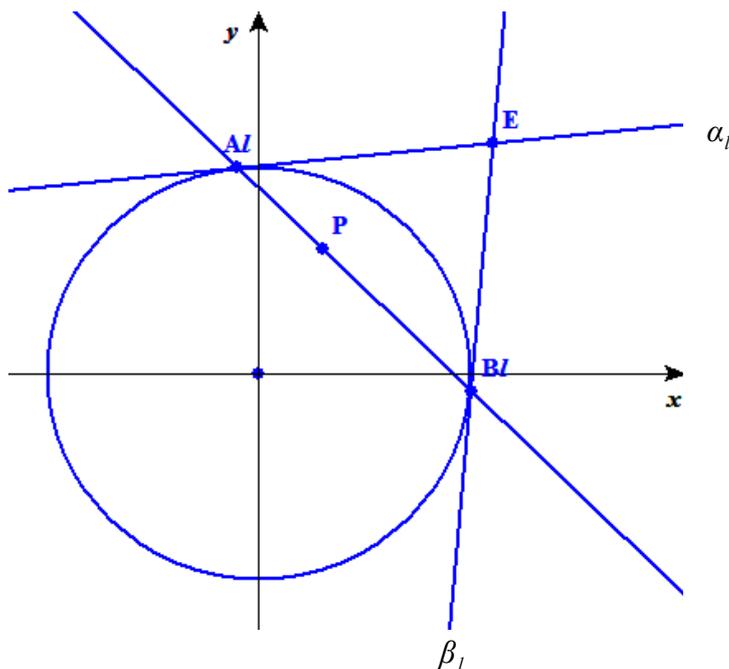
$$x_1x_0 + y_1y_0 = r^2 \cdots \textcircled{1}。同様に、B(x_2, y_2) とすれば、x_2x_0 + y_2y_0 = r^2 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ は直線 $x_0x + y_0y = r^2$ が点 A, B を通ることを示している。これもよく参考書に載っている。

(3) 点 P が円の内部にあるときは

$P(x_0, y_0)$ を通る任意の直線 l を考え、 l と円 O との2つの交点を A_l, B_l とする。

また、 A_l, B_l における円 O の接線を、 α_l, β_l とする。



α_l と β_l の交点を点 $E(X_l, Y_l)$ とすると、 l が点 P を通ってかつ、傾きを変えながら変化するとき、点 E の描く軌跡が $x_0x + y_0y = r^2$ となる。

(理由) l を任意にとり固定する。このとき、 $E(X_l, Y_l)$ は円 O の外部にあるので、(2)のことより

$x_lx + y_ly = r^2$ は A_l, B_l を通る直線である。これが点 $P(x_0, y_0)$ を通るので代入すると

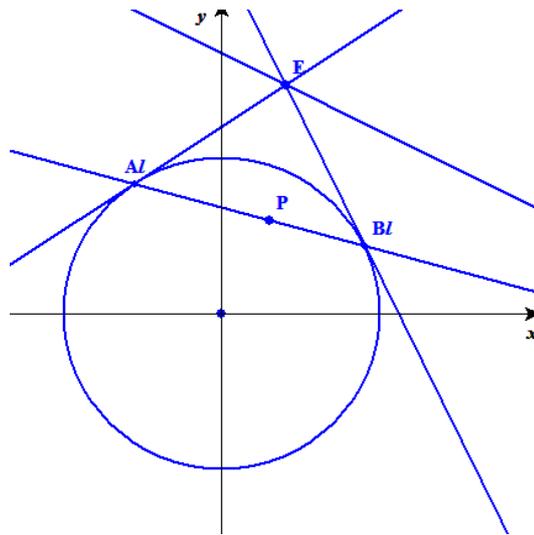
$$x_lx_0 + y_ly_0 = r^2 \text{ が成り立つが、この式は } x_0x + y_0y = r^2 \text{ 上に } E(X_l, Y_l) \text{ があることを表している。}$$

よって、 l を点 P を通る任意の直線とすれば、点 E は直線 $x_0x + y_0y = r^2$ 上にある。

逆に、 $x_0x + y_0y = r^2$ 上の任意の点を $E(X, Y)$ とると、 E から円に2つの接線が引ける。

(点 E が円の外部にあることは、直線 $x_0x + y_0y = r^2$ と原点との距離が、 $\frac{|-r^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > \frac{r^2}{r} = r > 0$ からわかる。)

その接点を A, B とすれば、2 点 A, B を通る直線は $Xx + Yy = r^2$ ……①である。
 一方、は $E(X, Y)$ $x_0x + y_0y = r^2$ 上にあるので、 $Xx_0 + Yy_0 = r^2$ を満足している、このことは①、すなわち、A, B を通る直線は点 P を通るということを表している。よって逆も成り立つ。
 以上により、証明された。(終)



(3)は実は反転と関係がある。

下の図のように、OP を直径とする円 K を考えると α_l と β_l の交点 E は、円 K と直線 OE との交点 F の円 O に関する反転であることがわかる。

(理由) Q を半直線 OP と直線 $x_0x + y_0y = r^2$ との交点とすると、 $\vec{OP} \perp \vec{EQ}$ であることが容易にわかるので、 $\angle OQE = 90^\circ$ である。 $\angle FOP = \angle QOE$ であるから、 $\triangle OFP \sim \triangle OQE$ となる。

ゆえに、 $OP : OE = OF : OQ$ であるから、 $OE \cdot OF = OP \cdot OQ = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \frac{|-r^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = r^2$

であるので、点 E は点 F の円 O に関する反転であり、また、点 Q は点 P の円 O に関する反転である。(終)
 結局、点 E の軌跡は円 K の反転像であり、それは2つの接線の交点の軌跡であるということが確認できた。

