$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ の計算方法について　～ 回転にこだわって ～

石原　論

（テーマ）　　自然数の和に関する教材研究　（高校数学：数列分野）

以下で使われる用語の説明

自然数の 2 乗和とは，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ のことです．

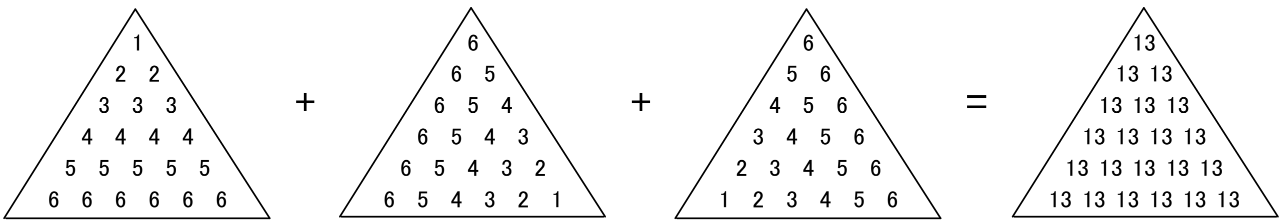
自然数の 3 乗和とは，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ のことです．

（本　論）

自然数の 2 乗和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ について，正三角形を回転させて求める方法は，次の図形を利用した興味深い方法が知られています．

$n=6$ の場合を例にとって説明します．

求める和を，$1^2+2^2+3^2+\cdots+6^2=1+(2+2)+(3+3+3)+\cdots+(6+6+6+6+6+6)$ と分解して，上から三角形の形になるように並べます．そのような三角形を 3 つ用意し，それらを回転させてから，三角形内の同じ位置にある数字を加えると下図のようになります．



このとき，右辺の三角形の中には 13 が（1+2+3+4+5+6）個入っています．そして，その三角形内のすべての数字の和は，左辺の 3 つの三角形内の数字の和になっています．したがって求める和は，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+6^2=13\times(1+2+3+4+5+6)\div 3=91$$

である，と計算することができます．これはとても鮮やかな方法であると思います．

今回はこれを拡張しようと思い，自然数の 3 乗和でも似たやり方ができないか考えてみました．

歴史をひもといてみると，18 世紀ドイツで生まれた数学者ガウスが 10 歳のときに，1 から 100 までの自然数の和を求めるときに用いたと言われる方法は次のものです．$1+2+3+\cdots+99+100$ を $100+99+98+\cdots+2+1$ と，加える順序をひっくり返して，2 つの式を加えると，

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 1\,+ & 2\,+ & 3\,+ & \cdots\,+ & 99\,+ & 100 \\ +)\ & 100\,+ & 99\,+ & 98\,+ & \cdots\,+ & 2\,+ & 1 \\ \hline & 101\,+ & 101\,+ & 101\,+ & \cdots\,+ & 101\,+ & 101 \end{array}$$

ここで，101 が 100 だけあるから，$101\times 100=10100$．それを 2 で割ると，$10100\div 2=5050$．

したがって，$1+2+3+\cdots+99+100=5050$ であると計算することができます．

このやり方は与えられた式を 180 度回転して加えているものだ，と見ることができます．

2 乗和については初めの例からわかるように，正三角形を用いて 120 度ずつ回転をして加えていると見ることができるでしょう．それならば, 3 乗和は正方形で 90 度ずつ回転させたら・・・と思うのは自然なことかもしれません．それでは，まず簡単な例から始めます．

（例）　$1^3+2^3+3^3+4^3$ について

$1^3+2^3+3^3+4^3=1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)+(4+8+12+16+12+8+4)$ と分解して，下の図のように L 字型に並べていきます．これは結果的に
は掛け算九九の表の一部となっています．これを 90 度ずつ回転させ，正方形内の同じ位置にある数字どうしを加えます．（下図参照）

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

＋

4	3	2	1
8	6	4	2
12	9	6	3
16	12	8	4

＋

16	12	8	4
12	9	6	3
8	6	4	2
4	3	2	1

＋

4	8	12	16
3	6	9	12
2	4	6	8
1	2	3	4

＝

25	25	25	25
25	25	25	25
25	25	25	25
25	25	25	25

このことから，$1^3+2^3+3^3+4^3=(25\times4^2)\div4=25\times16\div4=100$ と計算することができます．

一般に $1^3+2^3+\cdots+n^3$ でも同様に，回転して正方形内の同じ位置にある数字どうしを加えると下のようになります．

1	2	3	・	n
2	4	6	・	2n
3	6	9	・	3n
・	・	・	・	・
n	2n	3n	・	n^2

＋

n	・	3	2	1
2n	・	6	4	2
3n	・	9	6	3
・	・	・	・	・
n^2	・	3n	2n	n

＋

n^2	・	3n	2n	n
・	・	・	・	・
3n	・	9	6	3
2n	・	6	4	2
n	・	3	2	1

＋

n	2n	3n	・	n^2
・	・	・	・	・
3	6	9	・	3n
2	4	6	・	2n
1	2	3	・	n

＝

$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$

したがって，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(n+1)^2\times n^2\div4$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

となります．（公式）

以上，生徒が楽しく数学を学べるための教材となれば幸いです．今後も御指導よろしくお願いします．