第68回数学教育実践研究会
発表レポート

「別解」から考える復習の動機づけ

平成21年1月31日
北海道熊石高等学校
服部　祥平

1　はじめに

現在，私は2年生に数学ⅡBを教えています。個人的な感想として，この分野は，数学ⅠAや数学ⅢCと比べると，公式が多く出てきているように感じています。そのような背景より，授業内でも，公式に数値をあてはめるような演習問題を多く扱っています。その結果，生徒は公式に数字をあてはめる練習を行うことで，公式を覚えていき，それが定期試験の得点にもつながっています。一方で，公式の証明，公式の意味について関心をもつ生徒はほとんどいない状態で，その単元が終了すると，授業で扱った公式をほとんど忘れてしまっているという状況があります。せっかく身につけた知識であり，さらに，定期考査においても，点数という形で結果をだしているので，一生覚えている必要は無いにしても，学んだことを定期試験が終わったらすぐに忘れるのではなく，学んだ知識をぜひ継続して欲しいと願っています。今回は，そのような背景から実際に考えたことを報告したいと思います。

2　復習のきっかけづくりとしての「別解」

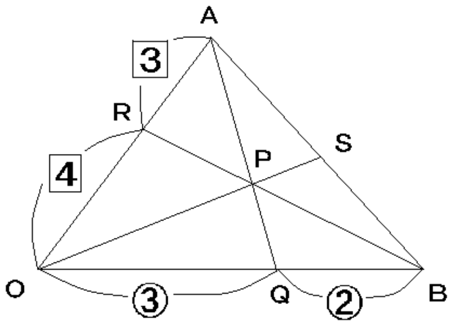
復習の必要性については，生徒自身も頭では理解していますが，それを実行に移すのは，困難であり，また教師自身も，何らかの形で働きかける必要があると考えています。復習の動機づけには，いくつかの方法が考えられます。1つの方法として，模試や大学入試の過去問の実施です。基本的に，これらの試験の範囲は一部の単元ではなく，3年間学んだ数学の範囲が扱われています。進学を目指している生徒に対しては，広範囲にわたる問題の解答を通して，模試や入試においては得点をとるために復習が必要であると実感させることが可能です。また，普段の授業においても，定期試験，長期休業明けテストなどにおいて，現在扱っている単元だけでなく，以前実施した単元を試験範囲に含めることで，復習のきっかけづくりが可能です。あまり，範囲を膨大にしてしまうと，肝心の現在行っている単元の理解状況を把握できなくなる恐れがありますが，復習の動機づけの1つとして活用していくことは可能であると考えています。このように，復習の動機づけにはいくつかの方法が考えられますが，今回，動機づけの方法として提案するのが,「別解」を扱うことによる，復習の動機づけです。数学は，解答方法は1通りではなく，複数の解法で答を導くことが可能な問題が多くみられます。例えば，図形と関連のある問題は多くの単元で扱われますが，1つの図形の問題に対し，多くの単元で扱った解法を用いて，解くことが可能と考えられます。具体的には，xy平面上で扱われている図形の問題をベクトルで解を導く，もしくは複素平面として考えるなど，いくつかの手段が挙げられます。生徒によっては得意な単元，苦手な単元があるので，得意な単元の解法を紹介することで，問題に対する苦手意識を解消し，別解すなわち以前扱った単元の解法で答を考えていくという作業を行うことで，復習の動機づけになるかもしれません。以下で，具体的な別解について紹介していきます。

3　様々な視点から図形を考える

具体例として，以下の問題について考えてみます。

三角形 OAB の内部に点 P があり，直線 AP と辺 OB の交点 Q は，辺 OB を 3 : 2 に内分し，直線 BP と辺 OA の交点 R は，辺 OA を 4 : 3 に内分する。また，線分 OP の延長と，辺 AB の交点を S とする。このとき，AS:SB の比を求めよ。

これはチャート式のベクトルの単元で扱われた問題です。実際に，大半の人は，ベクトルを用いて解を求めることを考えると思います。しかし，ベクトルを用いなければ，解けないという問題ではありません。まずは，問題文を注意して読み，問題で扱われている三角形がどのようなものであるかを考えてみます。実際に図で表すと，以下のようになります。



上記のような三角形において，AS:SB の比を求めていくことになります。この問題について，以下に述べる複数の方法で考えていきます。

3.1　ベクトルを用いた解法

まずはチャート式に実際に掲載されているベクトルを用いた解法で考えてみます。以下に解答を記載します。

(解答)

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{3}{7}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{5}\vec{b}$ と表される。ここで，$\mathrm{AP} : \mathrm{QP} = s : 1-s$，$\mathrm{RP} : \mathrm{BP} = q : 1-q$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は以下の 2 通りの方法で表すことができる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{5}s\,\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-q)\overrightarrow{\mathrm{OR}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1-q)\frac{3}{7}\vec{a} + q\,\vec{b}$$

ここで，係数比較をすると，$1-s = \frac{3}{7}(1-q)$，$\frac{3}{5}s = q$ となり，これを解くと，$s = \frac{15}{23}, q = \frac{9}{23}$ となるので，これらの値を代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{5}s\,\vec{b} = \frac{8}{23}\vec{a} + \frac{9}{23}s\,\vec{b}$$

となる。ここで，点 S は直線 OP 上にあるので，$\frac{8}{23} : \frac{9}{23} = 8 : 9$ より，AS:BS=9 : 8 となる。

(解答終)

3.2 平面幾何を用いた解法

次に数学 A の平面幾何の視点から考えてみます。扱う図形については，前節で記載した図形と同じになります。

(解答)

まず，3 直線 OS，AQ，BR が 1 点で交わっているので，チェバの定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QB}} \times \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SA}} \times \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RO}} = 1$$

という式が成り立つ。ここで，OQ:QB=3 : 2，AR:RO=3 : 4 より，$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QB}} = \frac{3}{2}$，$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RO}} = \frac{3}{4}$ となり，これらの値を代入すると以下のようになる。

$$\frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SA}} \times \frac{3}{4} = 1$$

以上より，式を整理すると，$9\mathrm{BS} = 8\mathrm{SA}$ となり，AS:BS=9 : 8 となることがわかる。

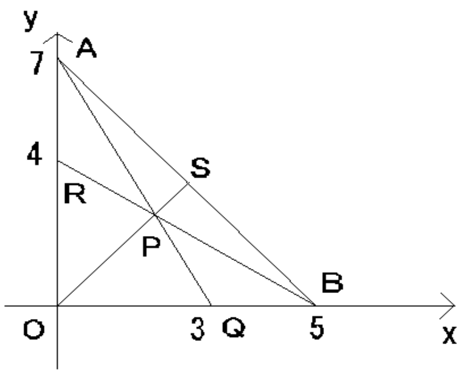
(解答終)

3.3 xy 平面を用いた解法

3 つ目として，かなり強引な解法ですが，問題で扱われている図形を xy 座標上で扱うことで，求めていく方法です。

(解答)

三角形 OAB を xy 座標で考え，頂点 O，A，B の座標をそれぞれ，$(0,0)$，$(0,7)$，$(5,0)$ とする。さらに，直線 OA 上にある点 R の座標を $(0,4)$，直線 OB 上にある点 Q の座標を $(3,0)$ とすると，点 R は辺 OA を 4 : 3 に内分する点で，点 Q は辺 OB を 3 : 2 に内分する点となる。実際に，図で表すと以下のようになる。



ここで，点 P は線分 RB と線分 AQ の交点であるので，まず，点 P の座標を求めることを考える。

直線 RB の方程式は 2 点 $(0,4)$，$(5,0)$ を通るので，

$$y = -\frac{4}{5}x + 4$$

と表される。また，直線 AQ の方程式は 2 点 $(0,7)$，$(3,0)$ を通るので，

$$y = -\frac{7}{3}x + 7$$

と表される。よって，2 直線の方程式より，連立方程式を解くと，$x=\dfrac{45}{23}, y=\dfrac{56}{23}$ となるので，交点 P の座標は $\left(\dfrac{45}{23}, \dfrac{56}{23}\right)$ となる。次に，点 S の座標について考える。点 S は直線 OP と直線 AB の交点であるので，これら 2 直線の交点について考える。直線 OP の方程式は 2 点 $(0,0)$，$\left(\dfrac{45}{23}, \dfrac{56}{23}\right)$ を通るので，

$$y=\frac{56}{45}x$$

と表される。また，直線 AB の方程式は 2 点 $(0,7)$，$(5,0)$ を通るので，

$$y=-\frac{7}{5}x+7$$

と表される。よって，2 直線の方程式より，連立方程式を解くと，$x=\dfrac{45}{17}, y=\dfrac{56}{17}$ となるので，交点 S の座標は $\left(\dfrac{45}{17}, \dfrac{56}{17}\right)$ と表される。ここで，点 S の x 座標に注目すると，$\dfrac{45}{17}$ は，2 点 A，B の x 座標の 0，5 を $9:8$ に内分する点である。y 座標についても同様である。よって，AS:BS=$9:8$ となる。

(解答終)

この解法は，途中計算で多くの分数が出てきて，答を出すのに，多くの時間を要するので，入試などの限られた時間で用いる解法としては，現実的ではありませんが，数学 II で扱う図形と方程式の考え方を用いた解法であるので，紹介しました。出てくる数字によっては，計算が簡単になる場合もあるかもしれません。

4　「別解」から「復習」へ

図形の問題に限らず，1 つの問題に対して，結論は 1 つであっても，結論を導き出す方法は必ずしも 1 つではなく，別解の存在するかもしれません。別解が，復習の動機づけに必ずしも結びつくとは限りません。逆に，別解の紹介で複数の単元の内容が 1 度に扱われて，生徒が混乱する恐れもあります。ただ，別解を紹介することで，自分の得意である単元と関連付けを行い，復習のきっかけづくりになる生徒もいるかもしれません。そのような意味で，今回の別解を扱った方法は，数ある復習の動機づけの中の 1 つとして考えていきたいと思います。

5　今後の展望

今回は，図形の問題を，ベクトル，平面幾何，図形と方程式で扱った解法を紹介しましたが，他にも教科書，問題集などを分析していくと，別解を探していくことは可能だと考えています。今回，紹介した解法は，いずれも計算量はやや多めでした。限られた授業，講習などの時間の中で，生徒自身が気軽に取り組めるような，別解についても探していきたいと思います。そして，別解の紹介が復習の動機づけになる生徒が 1 人でもいることを願います。

参考文献

[1] 改訂版　チャート式　解法と演習数学 II+B　数研出版