「定義」を問う入試問題

北海道帯広三条高等学校　吉田　亮介

定義を書かせる入試問題として、やはりセンセーショナルだったのは、1999年のこの問題でしょう。

［1999東京大］

(1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ．

(2)　(1) で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
を証明せよ．

この年の東京大学の入試問題の中で、ダントツの話題になったことは今だ記憶に新しい問題です。受験生の出来が非常に悪かったと東大関係者は告白しています。

受験生の感想として

「一番にびっくり！でも、解くしかない！」

「これは夢かと目をこすりつつ他の問題を見渡す」

「一番を見ていていきなり発狂。何だ、これ？….教科書にあるやつだ」

京都大学の上野健爾先生は「かなりの覚悟を決めた上での出題であろう。(1)で定義し(2)を証明させる問題の構成が素晴らしい。」と評価され、放送大学の長岡亮介先生は「勇気ある結晶」と絶賛されました。

この問題が出題される前のある受験参考書には「一般的に定理はきちんと証明まで理解しなくてはならない。しかし加法定理は大変なので例外的に覚えればいい。」おそらくその後その部分は改訂されたでしょう（笑）

このような定義を問う入試問題を調べてみたら東大より２年前にこんな問題が弘前大で出題されてました。

［1997弘前大］

(1)　「焦点」という言葉を用いて，楕円および双曲線の定義を述べよ．また，その概形もかけ．

(2)　2 点 $(-c, d), (c, d)$ を焦点とする，長軸の長さ $2a$ の楕円の方程式および，同じ 2 点を焦点とし、点 (e, d) を通る双曲線の方程式を求めよ．ただし，$0<c<a$，$0<e<c$ である．

(3)　楕円 E の長軸は直線 $y=1$ 上にあり，長さ 6，短軸は直線 $x=0$ 上にあり，長さ 2であるとする．そのとき楕円 E の 2 つの焦点の座標を求めよ．

弘前大はこのような根本を問うことが好きなのか、こんなのもあります。どの教科書にも解答が記載されている問題ですね。

［2006弘前大］

三角関数の微分を考える上で基礎となる極限に関する等式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を，図形の性質を用いて証明せよ。ただし，角の単位は弧度法によるものとする。

次は微分係数の定義を問う問題。(2)は経験がなければ理系の受験生にとってもある意味難問でしょう。

［2000お茶の水女子大］

(1)　実数全体で定義された関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の定義を述べよ．

(2)　関数 $f(x)$，$g(x)$ が微分可能であるとき，(1) に基づいて等式

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

が成り立つことを示せ．

次は、個人的に結構好きな問題です。定期考査に出題したいなあ。

［2006筑波大］

行列A,Bを　$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\\2&-1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}3&1&2\\4&-2&1\end{pmatrix}$とする。次の式のうち、定義されるものは計算し、定義されないものは「定義されない」とかけ。

（ア）$A+B$　　（イ）AB　　（ウ）BA　　（エ）AA

2006年には弘前大と同じ問題が順天堂でも出た！これって教科書じゃん。

［2006順天堂大(医)］

次の問いに答えよ。答えだけでなく式•説明など解答の途中の過程をも示すこと。

(1)　$y=f(x)$の$x=a$における微分係数の定義を述べよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$を示せ。

(3)　導関数の定義にしたがって、$\cos x$の導関数を求めよ。

衝撃の1題。ある種の戦慄すら覚えました。受験生はどれだけできたのでしょうか。こういう問題は大概誤りですけどね。

［2006大阪薬科大］

「$0!$の値は0である」は正しいか。正しければ「正しい」を誤りならば「正しい値」を書きなさい。

［2005奈良県立医科大］

(1)　集合 A，B について，「A が B の部分集合である(記号を用いて，$A \subset B$とかく)」ということの定義を述べよ(注意：A が「B を含む」あるいは「B に含まれる」という用語は定義されていない。「x が A の要素である(記号を用いて，$x \in A$ とかく)」ということは定義されている。$x \in A$ の否定を $x \notin A$ とかく)。

以下，全体集合とよばれる1つの集合 U を指定して，その部分集合 A，B，……，について考える。次の問いに答えよ。

(2)　A の補集合(記号を用いて，$\overline{A}$ とかく)の定義を述べよ。

(3)　$A \cap B = \varnothing$ であるとき，$B \subset \overline{A}$ であることを示せ(共通部分 $A \cap B$ および空集合$\varnothing$の定義に従って証明せよ)。

(4)　$B \subset \overline{A}$ であるとき，$A \cap B = \varnothing$ であることを示せ。

［2008埼玉大］

(1)　正弦に関する加法定理を用いて、$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を示せ。

(2)　三角形ABCの頂点A,B,Cの内角の大きさをそれぞれA,B,Cで表すことにする。

$A = \dfrac{\pi}{3}$のとき$\sin B + \sin C$および$\cos B + \cos C$,それぞれの範囲を求めよ。

(最近読んだ本で面白かったもの)

『出題者心理から見た入試数学』（芳沢光雄　著　ブルーバックス）

東京理科大、慶応大などで３０年近く入試数学の出題と採点に携わってきた芳沢先生が、大学入試の問題作りにおける葛藤や苦悩を書き下ろしました。これまで一切語られることのなかった作問の背景や意図、採点、その他諸々の事情について素直に論じています。

（内容）

第１章　学習指導要領と出題者心理

「出題範囲外」とは何か、絶滅の危機にある「融合問題」、受験生が意外に弱いのは小学生でも考えられる整数の問題、履修範囲外のハミルトン•ケイリーやロピタルの定理で解いてもよいか

第２章　マークシート問題の出題者心理

マークシート形式化が無理な問題（数値編）、マークシート形式化が無理な問題（選択肢編）「１」の多出とベンフォードの法則

第３章　計算と小問配列で見る出題者心理

「きたない数字の正解」は「不安心理に負けない精神力」を見る、「センス」を見る計算問題と「努力」を見る計算問題、「直列問題」と「並列問題」のプラス•マイナス

第４章　グラフ•図形問題の出題者心理

受験生を悩ますグラフを描く問題、幾何的センスを見る空間図形問題

第５章　証明•論理問題の出題者心理

数学的帰納法の「困った答案」回避法、想定外の答案が目立つ論理の問題、インドの大学入試問題で考える証明問題の意外な長所と短所、東大の円周率問題が開いた突破口