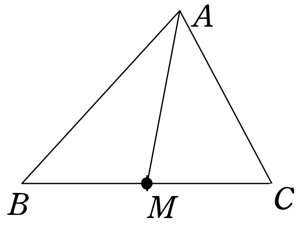
中線定理について　　北海道浜頓別高等学校　吉田亮介

1 はじめに

数学Ⅱの図形と方程式で扱われる「中線定理」についていくつかの考察をしてみたいと思います。

2 定理について

$\triangle ABC$の辺BCの中点をMとすると、次式が成立する。



$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

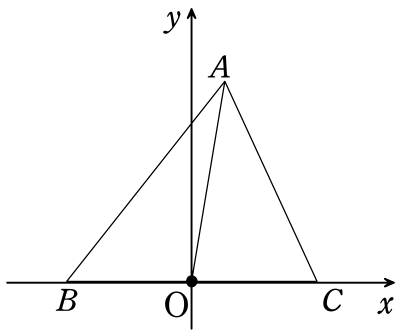
3 証明について

一般的に教科書では、単元の趣旨に合わせて次のような座標軸設定による証明を紹介しています。

(1)座標軸設定による証明

証明

線分BCの中点を原点Oとし、3点A，B，Cの座標をそれぞれ(a,b),$(-p,0)$ $(p,0)$とする。ただし$p>0$とする。



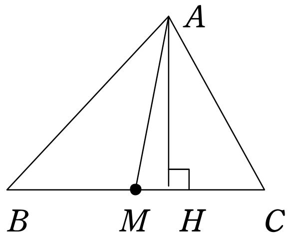
$$\text{左辺}=AB^2+AC^2=\{(a+p)^2+b^2\}+\{(a-p)^2+b^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+p^2)$$
$$\text{右辺}=2(AO^2+BO^2)$$
$$=2\{(a^2+b^2)+p^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+p^2)$$

よって、与式は成立する。終

(2)初等幾何的手法による証明

証明

$(case1)$ $\triangle ABC$が鋭角三角形の場合



証明　Aから線分BCに垂線をおろし、その足をHとする。

$$AB^2=AH^2+BH^2$$
$$AB^2=AH^2+(BM+MH)^2$$
$$AB^2=AH^2+BM^2+2BM\cdot MH+MH^2\cdots①$$

次に

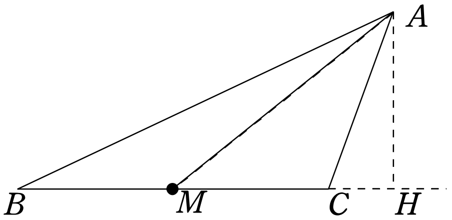
$$AC^2=AH^2+CH^2$$
$$AC^2=AH^2+(CM-MH)^2$$
$$AC^2=AH^2+CM^2-2CM\cdot MH+MH^2\cdots②$$

①＋②より

$$AB^2+AC^2=2AH^2+2BM^2+2MH^2 \quad (\because BM=CM)$$

$$AB^2+AC^2=2(AH^2+MH^2)+2BM^2$$
$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$$
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

$(case2)$ $\triangle ABC$が鈍角三角形の場合



$$AB^2=AH^2+BH^2$$
$$AB^2=AH^2+(BM+MH)^2$$
$$AB^2=AH^2+BM^2+2BM\cdot MH+MH^2\cdots①$$

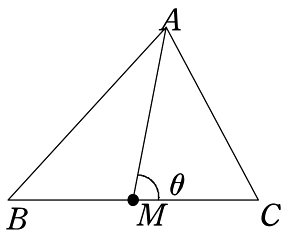
次に

$$AC^2=AH^2+CH^2$$
$$AC^2=AH^2+(MH-CM)^2$$
$$AC^2=AH^2+MH^2-2CM\cdot MH+CM^2\cdots②$$

以下、$BM=CM$を適用すれば$(case1)$と同様。

終

(3)余弦定理を用いる証明



証明

$\angle AMC=\theta$とする。

$\triangle AMC$に余弦定理を適用して

$$AC^2=AM^2+CM^2-2AM\cdot CM\cos\theta\cdots①$$

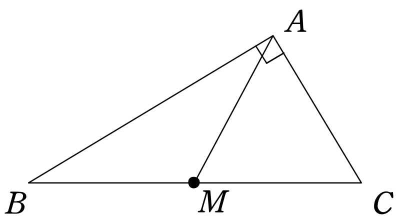
$\triangle AMB$に余弦定理を適用して

$$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos(180°-\theta)$$
$$AB^2=AM^2+BM^2+2AM\cdot BM\cos\theta\cdots②$$

①＋②より

$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2(\because BM=CM)$$
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$ 終

4 直角三角形における中線定理について



$\triangle ABC$が直角三角形のときは中点Mは$\triangle ABC$の外心になるので

$$AM=BM=CM\cdots①$$

が成り立ちます。ここで中線定理を適用すると

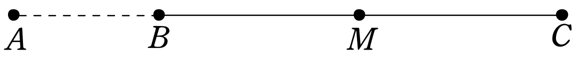
$$\begin{aligned}AB^2+AC^2&=2(AM^2+BM^2)\\&=4BM^2\quad(\because①)\\&=(2BM)^2\\&=BC^2\end{aligned}$$

となり、ピュタゴラスの定理そのものになります。

5 3点A, B, Cが一直線上にある場合

このときにも中線定理は成立します。以下のように示されます。

$(case1)$点Aが線分BC上にない場合

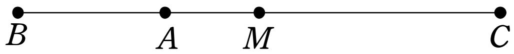


$$AB^2=(AM-BM)^2=AM^2-2AM\cdot BM+BM^2$$
$$AC^2=(AM+CM)^2=AM^2+2AM\cdot CM+CM^2$$

よって

$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2 \quad (\because BM=CM)$$
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

$(case2)$点Aが線分BC上にある場合



$$AB^2=(BM-AM)^2=BM^2-2AM\cdot BM+AM^2$$
$$AC^2=(AM+CM)^2=AM^2+2AM\cdot CM+CM^2$$

よって

$$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2 \quad (\because BM=CM)$$
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

この考察からわかることは以下のようになります。

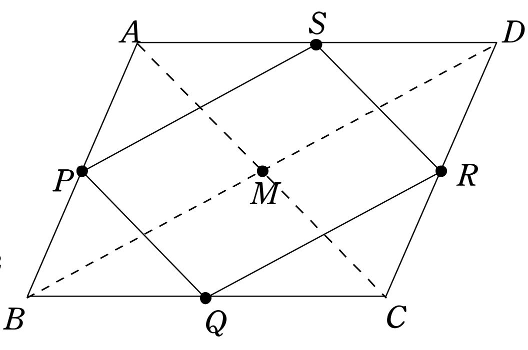
中線定理は、点Aの位置によらず成立する

表現を変えれば、前提として$\triangle ABC$の成立がなくとも中線定理は成立するということになります。

6 中線定理から導かれる平行四辺形の性質

$\square ABCD$において、辺AB, 辺BC, 辺CD, 辺DAの中点をそれぞれP, Q, R, Sとするとき以下の性質が導かれます。

(性質1)　$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(PQ^2+QR^2+RS^2+SP^2)$



(性質1)について

$\triangle ABC$に中線定理を適用すると

$AB^2+BC^2=2(BM^2+AM^2)$

$AB^2+BC^2=2BM^2+2AM^2$

$AB^2+BC^2=BM^2+DM^2+AM^2+CM^2$

$(\because BM=DM, AM=CM)$

両辺を2倍して

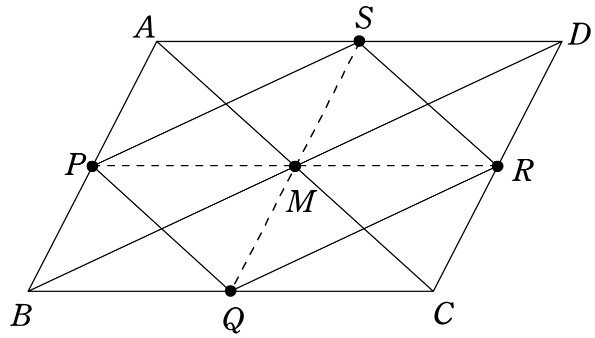
$2(AB^2+BC^2)=2(AM^2+BM^2+CM^2+DM^2)\cdots$①

①の左辺は　$2(AB^2+BC^2)=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

①の右辺は　中点連結定理より　$AM^2=PQ^2, BM^2=QR^2, CM^2=RS^2, DM^2=SP^2$

よって(性質1)の等式が成立する。終

(性質2)　$AC^2+BD^2=2(PR^2+QS^2)$



(性質2)について

$AC^2=(2PQ)^2=4PQ^2$

$BD^2=(2PS)^2=4PS^2$より

$AC^2+BD^2=4(PQ^2+PS^2)\cdots$①

$\triangle PQS$に中線定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2+PS^2&=2(PM^2+QM^2)\\ &=2\left\{\left(\frac{1}{2}PR\right)^2+\left(\frac{1}{2}QS\right)^2\right\}\\ &=\frac{1}{2}(PR^2+QS^2)\cdots ② \end{aligned}$$

②を①に代入すると(性質2)の等式が得られる。

(参考この性質2は一般の四角形$ABCD$でも成立する)

7 終わりに

私自身がそうだったのですが、この中線定理は教科書に記載されている証明を行ってそのまま掘り下げもせずに終わらせていました。しかし今回調べていくことによってなかなか美しいものを秘めているなと思うのと同時に、初等幾何の貴重さを再認識しました。

粗末な内容ですが、ご参考になれば幸いです。

(参考文献)

理系数学の原点$VOL1$　(諸橋 実 著　　河合出版)