ユニークな入試問題　その２

北海道帯広三条高等学校　　吉田　亮介

[2008佐賀大]

(1)　鋭角三角形 ABC の外接円の半径を R とし，頂点 A，B，C に向かい合う辺の長さを a，b，c とおく。このとき，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ を証明せよ。

(2)　45°，60°，75° を内角にもつ三角形を利用して，$\sin 75^\circ$ の値を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

> 何とこれは正弦定理の証明ではないか！！(1)は佐賀に集結した全ての受験生がビビったことだろう。
> (1)で定理を証明して、(2)では正弦定理を使って$\sin 75^\circ$の値を求めさせるという流れ。
> (1)の証明ができなくて、(2)を解きにいった受験生も結構いたんじゃないか。どうなんだろう？この問題はインパクトあり。

[2008埼玉大]

(1)　正弦に関する加法定理を用いて，

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　三角形 ABC の頂点 A，B，C の内角の大きさをそれぞれ A，B，C で表すことにする。$A=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin B+\sin C$ および $\cos B+\cos C$，それぞれの範囲を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin B+\sin C\leqq\sqrt{3}$，$\dfrac{1}{2}<\cos B+\cos C\leqq 1$

> この年埼玉では、和→積の公式の証明。(2)は$A=\dfrac{\pi}{3}$と固定しておいて、(1)の結果を使わせる流れ。
> 冒頭部の「正弦に関する加法定理を用いて」というさりげない誘導にも配慮がとても感じられる。

[2007東京大]

正の整数の下 2 桁 (けた) とは，100 の位以上を無視した数をいう。例えば 2000，12345の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

解答　0，5，25，80

> タイトル通りユニークな問題というわけではないが、これは面白かった。$5m^2$の5が何とも絶妙。
> 受験生の「考える力」を問うには整数はもってこいだろう。さすが東大、問題設定に気品すら漂う。

[2008広島大]

1 本 80 円のシャープペンシルと 1 本 50 円のボールペンと 1 本 20 円の鉛筆をちょうど750 円分買うものとする。シャープペンシルとボールペンと鉛筆の本数の合計を n 本とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　n が 3 の倍数になることを証明せよ。

(2)　$n=12$ となるようなシャープペンシルとボールペンと鉛筆の本数の組をすべて求めよ。

解答　(1)　略

(2)　(シャープペンシル，ボールペン，鉛筆)＝(5，7，0)，(6，5，1)，(7，3，2)，(8，1，3)

一瞬高校入試のようなシチュエーションだが、連立方程式から整数解を絞り込む問題に帰着。受験生はきちんと解答を作れただろうか。

[2007京都大]

1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき，1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

解答　277 通り

昔はよくやった「一段飛ばし」が数学の問題になるとこんなに難しくなるのか。一段飛ばしを連続してはいけない。実際にやったらかなりバランスを崩しそう….。
ということは1段ずつ登る間（スキマ）に2段を挿入すればよい。なるほど、立派な場合の数の問題だ。

[2008徳島大]

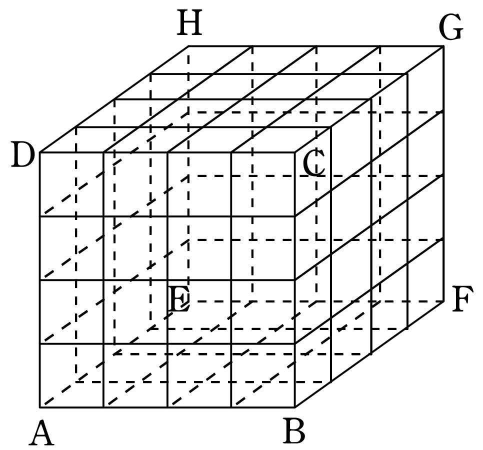
立方体 ABCD EFGH のすべての面に，辺も含めて縦横 5 本の線分を等間隔に引き，格子状の道を作る。これらの道を通って，立方体の表面を点 A から点 G へ行く最短の道筋について，次の問いに答えよ。

(1)　点 C を通る道筋は何通りか。

(2)　辺 BC 上の少なくとも 1 点を通る道筋は何通りか。

(3)　2 辺 BC，CD 上の少なくとも 1 点を通る道筋は何通りか。

(4)　すべての道筋は何通りか。



解答　(1)　70 通り　　(2)　495 通り　　(3)　920 通り　　(4)　2550 通り

立体の最短経路の問題。展開図をかき、立体から平面に帰着して考えると知っている公式を使える。個人的にはすごく好きな問題。