ユニークな入試問題

北海道帯広三条高等学校　　吉田　亮介

まずは、個人的に一際目をひいたこの問題から。後半の高揚感がたまらない。

[2009 神戸大 文・法・経済]

以下の問いに答えよ。

(1) A,Bの二人がそれぞれ「石」「はさみ」「紙」の3種類の「手」から無作為に1つを選んで双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け、「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け、同じ手どうしは引き分けとする。AがBに勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2) 上の3種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ、これに加えて、4種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け、同じ「手」どうしは引き分けとする。A,Bがともに4種類の「手」から無作為に1つを選ぶときAが勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3) 上の4種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ、これに加えて、さらに第5の「手」として「土」を加える。Bが5種類の「手」から無作為に１つを選ぶとき、Aの勝つ確率がAの選ぶ「手」によらないようにするためには、「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をどのように定めればよいか。ただし、同じ「手」どうしの場合、しかもその場合にのみ引き分けとする。

解答 (1) ともに$\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}$

(3) 2人の手の出し方は5^2通り。題意のようになるときA,Bもそれぞれ勝つ確率は同じなので、Aが勝つのは$(25-5)\div 2=10$通りある。

A	石	はさみ	紙	水	土
B	はさみ　○	紙　○	石　水	石　はさみ	●　●

5通りの手が同じ確率で勝つことになるのは、5個の手のそれぞれに2通りずつAが勝つ場合があるときなので○に土が入り、●には紙と水が入る。つまり、土は紙と水に勝ち、石とはさみに負けるように決めればよい。

(コメント)

(1) は通常のじゃんけん。(2)は手が一手増えるだけ。すんごく面白いなと思ったのが(3)。勝敗規則を確率の観点から考察させるという視点がとてもユニーク。受験生は定型的じゃないだけとってもとまどったのではないか。公式一発で解決できない冷静な思考力を問うている。個人的にこの問題の意図が大変勉強になった。
なるほど、ここに行き着きたかったのだと。

[2009 鳴門教育大学　学校教育]

問題 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{イ}}$ までの数字を1つずつ書いた $\boxed{\text{ウ}}$ 枚のカードの中から2枚のカードを同時にとりだす。

このときその2枚のカードの数の $\boxed{\quad\text{エ}\quad}$ である確率を求めよ。

(1) $\boxed{\text{ア}}$ には10より大きい自然数を、$\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$ には3桁の自然数を、$\boxed{\quad\text{エ}\quad}$ には適切な文をいれて確率の加法定理を用いる問題となるように問題文を完成させよ。

(2) 完成させた問題を確率の加法定理を用いて解きなさい。

(コメント)

問題を作らせることで加法定理そのものを問うている。このユニークさと、この問いから発せられているインパクトは素通りできないだろうと個人的には感じます。

[2009 名古屋工業大学]

日本近海にある海域では未確認飛行物体(UFO)が頻繁に目撃されている。あるテレビ局がスクープ映像をねらって取材チームをこの海域に送り込んだ。

海面をxy平面とする座標空間で船舶1を点$A(4,0,0)$に、船舶2を点$B(0,5,0)$に配置し、空中ではヘリコプターが点$C(11,13,2)$の近くで待機している。

(1) 午後4時に船舶1からベクトル$(2,3,3)$の方向に、船舶2からベクトル$(6,-2,3)$の方向にUFOが見えた。午後4時におけるUFOの位置を点Pとするとき、Pの座標を求めよ。

(2) 4分前の3時56分にUFOは点$Q(2,0,3)$にいたことが確認された。UFOは方向、速さ一定のまま飛行していると予測される。4時t分におけるUFOの予測される位置の座標を求めよ。

(3) UFOの予測飛行ルートの中で、点Cに最も近い点Rの座標を求めよ。

(4) UFO発見の報告で、4時5分にヘリコプターが分速1で点Cから(3)の点Rに向かって直進した。ヘリコプターとUFOのどちらが先に点Rに到着したか。理由とともに答えよ。

解答 (1) $P(6,3,3)$ (2) $\left(t+6,\dfrac{3}{4}t+3,3\right)$ (3) $(14,9,3)$ (4) UFO

(コメント)

設定が一際目を引くが、内容はわりに基本的で(1)は直線のベクトル方程式、(2)は同一直線上にある条件、(3)は2点間の距離の最小問題と、しっかりと題意が分析できればそれほど面倒くさくはない。
ただ、この問題に流れる「円谷プロ」的な臨場感がたまらない。

[2009 奈良県立医科大学 医]

任意の正の整数nに対して関数$f_n(\theta)=n^2\sin\theta\cos^{2n}\theta$を定義する。このとき次式が成り立つかどうか調べよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(\theta)\right)d\theta$$

(コメント)

$\lim\limits_{n\to\infty}$と$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$の交換が成立するかという問題。辛抱強く計算すれば答えがでるが、これは目をひいた。

[2009 お茶の水女大 文教育・生活科学]

正の整数nに対しnの正の約数すべての和を$\sigma(n)$とおく。ただし、1とnもnの約数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 素数p,正の整数aに対し$n=p^a$とおく。$\sigma(n)$をpとaで表せ。

(2) 相異なる素数p,q,正の整数a,bに対し、$n=p^a,m=q^b$とおく。このとき

$$\sigma(nm)=\sigma(n)\sigma(m)$$

が成立することを証明せよ。

(3) 正の整数aについて2^a-1が素数とする。このとき$n=2^{a-1}(2^a-1)$とおくと

$$\sigma(n)=2n$$

となることを証明せよ。

(コメント)

(1)(2)は数学Aの約数の問題だが、見慣れないギリシャ文字にとまどう受験生もいたのでは。文系の生徒には少々ハードな設定かもしれない。(3)は所謂「完全数」の問題。過去に群馬大にも出題されている。