内積の導入における一考察

北海道浜頓別高等学校　吉田亮介

1. はじめに

私はかねてより昔からベクトルの授業において「内積」をどのように導入して説明すれば、生徒にその意味が伝わるのかと試行錯誤してきました。この単元の中でも大きく話題が転換する場面だけに初学者である生徒もなかなか意味がつかみにくい状況があるように思います。そのような経緯から本テーマを考察してみました。

2.　教科書における内積の定義

導入部分

「$\triangle OAB$において余弦定理を適用すると、$BA^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta$

このOA・OBcosθ をベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$で表し新しい演算を考えよう。」

以後教科書の記載は①→②の順で流れていく。

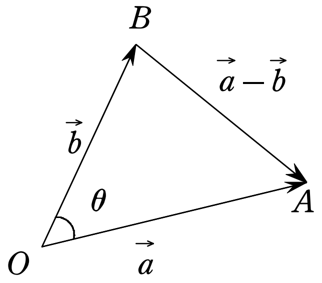
①ベクトルの内積

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0},\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$とする。

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$を$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$で表す。すなわち

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$……①（ただし$\theta$は$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角とする）

②成分による内積表示



$\triangle OAB$に余弦定理を適用すると

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$……$(A)$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$　（①より）

となる。ここで$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$とすると

$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\Leftrightarrow$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$……②

3.　内積導入の課題点の整理

①→②の順で説明をしていく場合、①の定義式を生徒にどのように解釈させるが問題となる。この場合どうしても①の持つ意味を語る場面があるが、そこが初学者にとってなかなか納得しづらいという状況があるように思う。

そんな経緯を踏まえ、②→①の順で導入する方法を提示してみる。このことは5で論じてみたい。

その前に、過去における私の授業を振り返ってみることにする。

4. 過去の私の授業から

①による定義式から

(1)$\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \Leftrightarrow \theta$は鋭角　(2)$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \theta$は直角　(3)$\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \Leftrightarrow \theta$は鈍角

と2つのベクトルの位置関係(表現を変えれば開き具合)が判定できる。

このように$\vec{a}$と$\vec{b}$の間の関係が明確になる演算が内積の意味である。

しかし冷静な生徒は次のような疑問を持つ。

生徒の疑問(1)

「$\cos\theta$の符号により、$\vec{a}$と$\vec{b}$の位置関係を判定できるのは理解できるが、$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$にくっついている$|\vec{a}||\vec{b}|$は何か意味があるのだろうか？」

私の心の中『確かにそこに疑問を持つのも頷ける』

その後おなじみの正射影の話に持ち込んだのだがそこでも不服そうな表情。
むしろ逆効果….。
立て続けに生徒の疑問は続く。

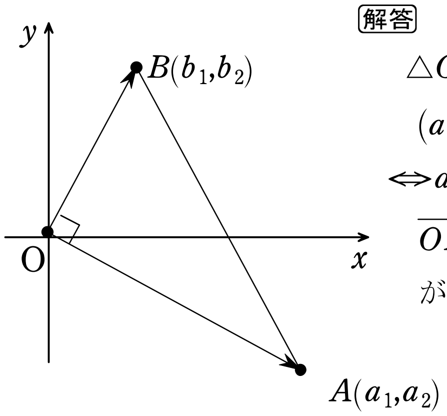
生徒の疑問(2)

「そもそもどうしてこのような式の形をしているのか？」

私の心の中『ごもっとも….。』

5. 内積の導入における個人的考察

(*STEP1*)　3点$O(0,0), A(a_1,a_2), B(b_1,b_2)$がある。$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2), \overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$において$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$のとき、$a_1,a_2,b_1,b_2$に成り立つ関係を求めよ。



解答

$\triangle OAB$にピュタゴラスの定理を適用すると

$(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$

$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$が軸上にあり、垂直であるときも$a_1b_1+a_2b_2=0$が成立する。終

別解　図形と方程式（数学Ⅱ）の直線の方程式の視点から

直線OAと直線OBの傾きの積は-1なので、$a_1 \fallingdotseq 0, b_1 \fallingdotseq 0$のとき

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_2}{b_1} = -1 \Leftrightarrow a_2 b_2 = -a_1 b_1 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

と考えても良い。

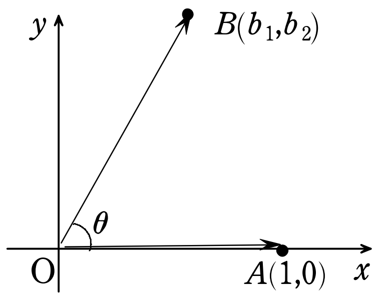
このように$\vec{a} \perp \vec{b}$のとき$a_1 b_1 + a_2 b_2$の値は0になり、２つのベクトルの間には関係式⓶が成立する。この何となく覚えやすくて意味がありそうな$a_1 b_1 + a_2 b_2$という値は$\angle AOB$の状況によってどのような結果になるのか具体的な成分で(*STEP2*)を考察してみる。

(*STEP2*)　3点$O(0,0), A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$がある。$\angle AOB = \theta$が鋭角のときと鈍角のときとで$a_1 b_1 + a_2 b_2$の値を考察せよ。ただし$a_1 = 1, a_2 = 0$で考えてよい。

解答

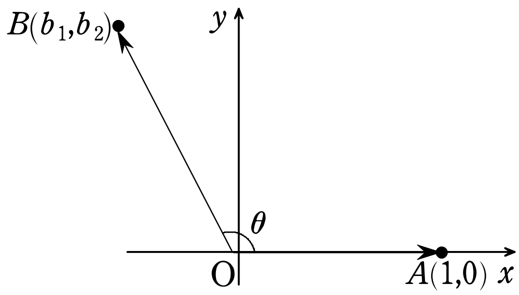
$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 = b_1$となる。

(*case1*)　θが鋭角のとき



θが鋭角のときは、$b_1 > 0$

(*case2*)　θが鈍角のとき



θが鈍角のときは、$b_1 < 0$

よって、このことから

$$\theta が \begin{cases} 直角のとき、a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \\ 鋭角のとき、a_1 b_1 + a_2 b_2 > 0 \\ 鈍角のとき、a_1 b_1 + a_2 b_2 < 0 \end{cases}$$

となることがわかる。

(*STEP4*)　このように$\angle AOB = \theta$の状況によって$a_1 b_1 + a_2 b_2$の値は変わることから

$\vec{a}$と$\vec{b}$の位置関係（なす角の状況）が明確になる演算として$a_1 b_1 + a_2 b_2$の値は意味を持つ。

考えることができる。

この$a_1 b_1 + a_2 b_2$のことを$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を名づけ記号$\vec{a} \cdot \vec{b}$で表現する。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{(⓶の提示)}$$

さらに、余弦定理の(A)式から

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2\}$$

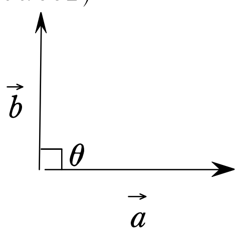
$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2)$$

$$=a_1b_1+a_2b_2$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ となることがわかった。(①の提示)

①から

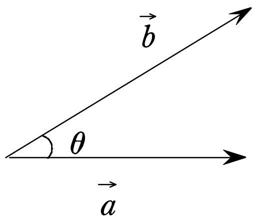
$(case1)$



θが直角なら$\cos\theta=0$

より$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

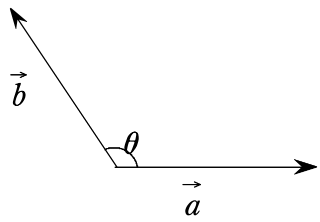
$(case2)$



θが鋭角なら$\cos\theta>0$

より$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$

$(case3)$



θが鈍角なら$\cos\theta<0$

より$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

となることも、（視覚的な観点から）了承される。

①の持つ図形的な意味(4で述べた正射影に関する話題)は、このような流れの中で説明した方が唐突過ぎず良いのかもしれない。

ここで注目すべきこととして

$a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$という等式の根底にあるものは余弦定理そのものである

という事実を生徒に強調したい。

6 終わりに

定義を語るとき「このように約束されたものだから」という説明方法もある。

しかし、そこにはこめられた意味や意図があるはずである。

先人がどのような視点を持ってそのルールを設定したのかという疑問を持ちながら背景にある数学的な事象なども有機的に結びつけて生徒に提供していくことを心がけたい。

《参考文献》

（１）新編数学Ｂ　　　　　　　　　　　　　　　（数研出版）

（２）わくわく学ぶ数学Ｂの考え方　植野義明　著（増進会出版社）