2つの放物線における共通接線

北海道帯広三条高等学校　吉田　亮介

［2010北海道大］

a を正の実数とし，2 つの放物線 C_1：$y=x^2$，C_2：$y=x^2-4ax+4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 lの方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 lで囲まれた図形の面積を求めよ。

２つの放物線に接する共通接線が話題になっています。

以下は接線の方程式を2本立て係数比較するオーソドックスな解法です。

(1)の解答　（接線の方程式を2本立て係数比較する解法）

C_1とlの接点を$(p\,,\,p^2)$とすると、接線の方程式は、$y=2p(x-p)+p^2$より

$$y=2px-p^2 \quad \cdots\text{①}$$

C_2とlの接点を$(q\,,\,q^2-4aq+4a\,)$として、同様に計算すると

$$y=(2q-4a)x-q^2+4a \quad \cdots\text{②}$$

①と②の右辺の係数を比較して、

$$\begin{cases}2p=2q-4a\\-p^2=-q^2+4a\end{cases}$$

これを、p,qについて解くと、$p=1-a\,,\,q=1+a$

よってlの方程式は、$y=2(1-a)x-(1-a)^2$　答

他には判別式$D=0$の解法もあるかと思います。

では視点を変えて、2つの頂点を通る直線に着目して別解を示します。

(1)の別解　（共通接線の傾き＝2頂点を通る直線の傾きとする解法）

接線lの傾き＝C_1の頂点$(0\,,\,0)$とC_2の頂点$(2a\,,\,-4a^2+4a)$を通る直線の傾き

$$=\frac{-4a^2+4a}{2a}$$

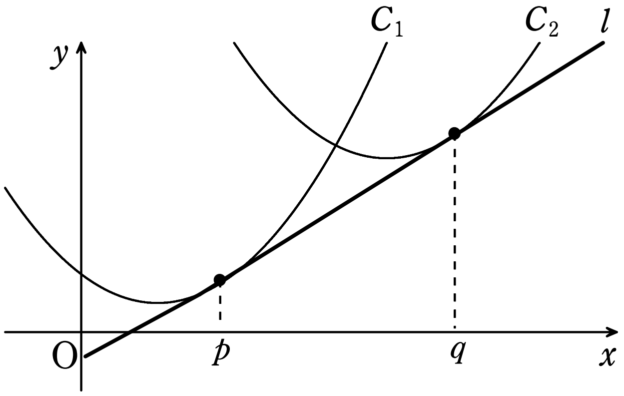
$$=2(1-a)$$

$f(x)=x^2,\ g(x)=x^2-4ax+4a$とおくと

$f'(p)=g'\ q\ =2(1-a)$より、$p=1-a\,,\,q=1+a$

以下最初の解答と同様。

1. 別解で用いた「共通接線の傾き＝2つの頂点を通る直線の傾き」の証明



$C_1: f(x)=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$

$C_2: g(x)=ax^2+dx+e\ (a \neq 0)$

C_1とC_2の共通接線lを$y=\alpha x+\beta$とする。

C_1とlが接するので

$ax^2+(b-\alpha)x+c-\beta=a(x-p)^2$

$ax^2+(b-\alpha)x+c-\beta=ax^2-2apx+ap^2$　より係数比較して

$$\begin{cases} b-\alpha=-2ap \\ c-\beta=ap^2 \end{cases} \text{ より } \begin{cases} b=\alpha-2ap & \cdots\cdots ① \\ c=\beta+ap^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

同様にC_2とlが接するので

$ax^2+(d-\alpha)x+e-\beta=a(x-q)^2$

$ax^2+(d-\alpha)x+e-\beta=ax^2-2aqx+aq^2$　より係数比較して

$$\begin{cases} d-\alpha=-2aq \\ e-\beta=aq^2 \end{cases} \text{ より } \begin{cases} d=\alpha-2aq & \cdots\cdots ③ \\ e=\beta+aq^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

ここでC_1の頂点$\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$と$C_2$の頂点$\left(-\dfrac{d}{2a}, -\dfrac{d^2-4ae}{4a}\right)$を通る直線の傾きを求めると

2つの頂点を通る直線の傾き

$$=\frac{-\dfrac{b^2-4ac}{4a}-\left(-\dfrac{d^2-4ae}{4a}\right)}{-\dfrac{b}{2a}-\left(-\dfrac{d}{2a}\right)}$$

$$=\frac{(d+b)(d-b)+4a(c-e)}{2(d-b)}$$

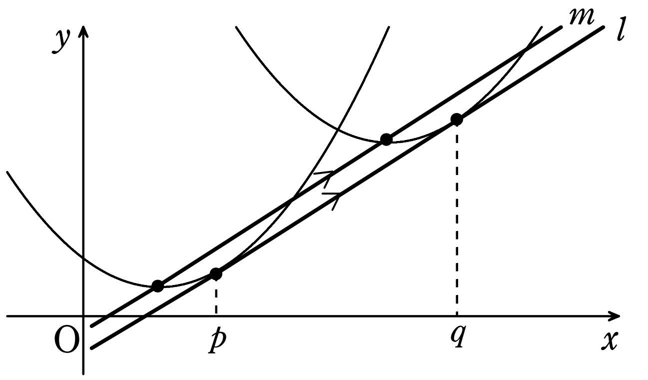
$$=\frac{\{2\alpha-2a(p+q)\}\{2a(p-q)\}+4a\{a(p+q)(p-q)\}}{4a(p-q)} \quad (\because ①,②,③,④)$$

$$=\frac{2a\{2\alpha-2a(p+q)\}+4a^2(p+q)}{4a}$$

$=\alpha=$共通接線の傾き

となります。　　終

図でとらえると以下のようになります。



2直線lとmについて

$$l \mathbin{/\!/} m$$

2 .C_1とC_2の共有点のx座標について

冒頭の問題の(2)ではC_1とC_2の共有点のx座標が必要になります。

計算では、yを消去して

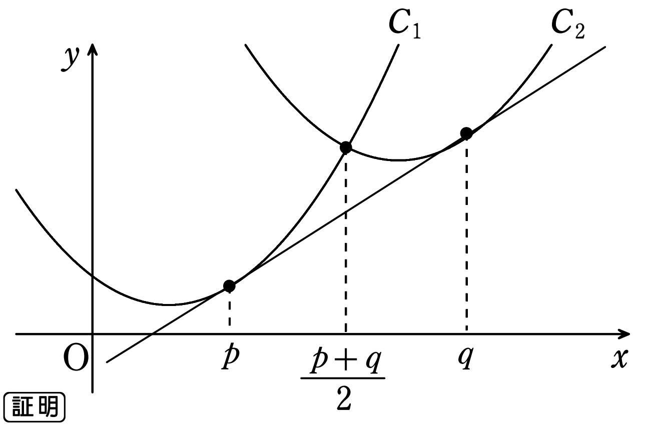
$x^2=x^2-4ax+4a$より

$x=1$

とすぐに求まりますが、以下のように中点になるという事実を押さえておけば、

$$x=\frac{p+q}{2}=\frac{(1-a)+(1+a)}{2}=1$$

となります。この事実を証明します。



$C_1:f(x)=ax^2+bx+c\ (a\fallingdotseq 0)$

$C_2:g(x)=ax^2+dx+e\ (a\fallingdotseq 0)$

証明

yを消去して

$ax^2+bx+c=ax^2+dx+e$

$(b-d)x=e-c$

$$x=\frac{e-c}{b-d}\quad\left(\because\ -\frac{b}{2a}\fallingdotseq -\frac{d}{2a}\text{より}b\fallingdotseq d\right)$$

$$=\frac{(\beta+aq^2)-(\beta+ap^2)}{(\alpha-2ap)-(\alpha-2aq)}$$

$$=\frac{a(q+p)(q-p)}{2a(q-p)}=\frac{p+q}{2}$$ 終