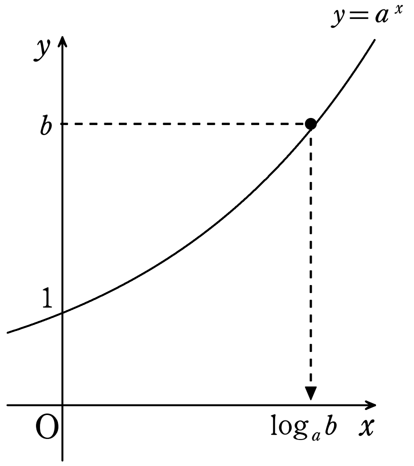
対　数

札幌国際情報高等学校　吉田　亮介

1 対数の登場



aを$a>0, a \neq 1$を満たす実数とする。
正の実数 bに対して

$$a^x = b$$

を満たす xの値はただ一つ存在する。
この値を

$$\log_a b$$

と表し、「aを底とするbの対数」という。

まさに前ぶれのない嵐のような登場だね。いよいよ対数の開幕だ。

これを一言で言うと

$a^x=b$を満たすxの値のことを$x=\log_a b$ とする

と定義して、解をオールマイティに表現できるようにしたんだ。

「bの対数」といっているので、$y=b$をスタート地点と見たときの、逆向きに対応する関数値といってもいい。着陸する xの値のことを、aを底とするbの対数というんだ。logの本名はロガリズムと言うんだけど、別にズムとつくからといって何とか主義じゃないから。

実に唐突な登場だけど、これは数学の歴史のなかではよくある話で、$x^2=a$の解をルートを使って表現したことと質的に同じ感覚だ。新しい記号を導入して理論を構築するのは数学の常套手段だからね。 ただ、残念なことに今回は記号がちょっとごついんだなぁ。

これによると、例えば

$2^x=8$ を満たすxのことを$\log_2 8$

$2^x=9$ を満たすxのことを$\log_2 9$

と、嫌でも書くしかない（笑） でも $2^x=8$を満たすxは3とわかるので 、 $\log_2 8=3$ だよね。

このように左辺の底の2と右辺の値の「相性」がよければ、対数の値はうちらが知っているなじみのある数に変換できる。 $2^x=9$だとxの値は困るよね。そこで対数を導入して解の求め方に「一貫性」を持たせる訳だ。

2 対数をシンプルに語ると

一言でいってしまうと　$\log_a b$ は「aをbにする<u>指数</u>」

なんだよ。だから

$$当然\ a^{\log_a b} = b\ が成り立つ$$

このルールに則れば、$3^{\log_3 5}=5$ だし、 $10^{\log_{10} 1}=1$ になるんだよ。まだ自然な等式に見えないね。そうそう、後半の式の指数 $\log_{10} 1$ は0になるよね。だって $10^0=1$だから指数を比較することでわかる。

対数は比較的公式が少ない分野なんだけどいくつかあるので順番に紹介していくことにしよう。

3　対数の公式たち

ところで $a^{\square}=a$の□には1が入るよね。でも□は新ルールによると「 aをaにする指数」 だから $\log_a a$と表現できる。 ということは $\log_a a=1$ だね。底＝真数のとき、対数の値は1になる。

次に$a^{\square}=1$の□を2通りで表して手をつなぐと$\log_a 1=0$も納得できるはずだね。

(1) $\log_a a=1$

(2) $\log_a 1=0$

この2つは有名な関係式だから覚えてしまおう。10代の記憶力なら無敵だと思う。（笑）

対数の和、差について話すね。式は以下のようになるんだ。

(3) $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$ （→方向には1個にまとめる。 ←方向には和に分解する）

(4) $\log_a b-\log_a c=\log_a \dfrac{b}{c}$ （→方向には1個にまとめる。 ←方向には差に分解する）

ここで $a^{\log_a b}=b$を召喚するかな。

$a^{\log_a b}=b$ と $a^{\log_a c}=c$より、$a^{\log_a b+\log_a c}=bc$だね。 左辺の指数 $\log_a b+\log_a c$は aをbcにする指数と一致するので (3) がいえるね。更に $a^{\log_a b-\log_a c}=\dfrac{b}{c}$ から (4)も導ける。

あと、次の公式もあって、M乗すれば簡単に導ける。

(5)　$\log_a b^M=M\log_a b$ （→方向には Mを前にすべらす。 ←方向には M を戻す）

等式の解釈で大事なのは（　）にも書いたように、左辺から右辺の一方通行ではなくて、両方向の使用を場面場面で把握していくことだね。これはこれから積み上げていく経験値が必要になってくる。

また、(3)〜(5) の左辺と右辺の底が同じ a になっていることにも要注意だ。

じゃあ底が異なる場合はどう計算するのだろう。

何と、都合のいい底に自由自在に変換する便利な公式がちゃんと用意されている。抜け目がないね。

ここで底を aではなくて別の値cにしたいとしよう。

再び$a^{\log_a b}=b$を召喚。 両辺に底を c とする対数をとると、 $\log_c a^{\log_a b}=\log_c b$ となる

(5)を使ったあと、両辺を$\log_c a$で割ると、底の変換公式の出来上がり。

(6)　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　　（底の変換公式）

底 a は底にもぐる

4　対数の印象

ここでちょっと休憩。休みがてら過去の先輩たちの声を紹介するかな。

Q　対数の印象はどうですか？

その①　出てくる意味がとにかくわからない！

その②　記号が長すぎて実数に見えない！

その③　計算はできるようになったが結局あなたは何？

とまあ、すこぶる評判が悪い。確かに①に関しては、本当に唐突で、まるでいきなり来る嵐のようだ。天気予報で「明日から石狩地方の数学では不思議議で見たことがない記号がまかり通ります。」とかアナウンスしてほしいもんだ。②については生徒と同感。もう少し短くできなかったのかなと思う。作

り手の思いが込められている記号だとは思うけど、生徒目線だと、②の指摘はすごく言い得ていると思う。下手したら秘密結社の印みたいだし。③はあるあるだね。定義を忘れても公式 (1)〜(5) にあてはめれば計算できるという、別名計算マシーンの製造だ。（笑）

初めて学ぶ生徒にこれだけ評判の悪い対数だけど、人の手によって作られた血の通った理論なんだ。先ほど話したように教科書では指数法則がベースになって、対数の世界が彩られていくんだ。初めて学んだみんなからすると記号が多くてうんざりすると思う。でも

工夫された定義から作られた、先人の知恵と努力の結晶

なんだよ。

地球と太陽の距離は覚えているかい。中学理科の知識だね。その距離は1億5000万kmくらいといわれている。天文学はとてつもなく桁の大きい数を相手にしなければならない。この途方もない値を手のひらサイズに変換するツールが対数だ。こうすることで手軽で実感の持てる値にするわけだ。化学のmolと同じ思想だね。

1億5000万＝1.5×10^8として、底を10とする対数を使うんだ。この対数を常用対数といって巻末に表があるのでそれを使うと

$$\log_{10}1.5\cdot10^8=\log_{10}1.5+8=0.1761+8=8.1761$$

として手のひらサイズに変換完了。

この対数の生みの親がジョン･ネイピアいう人なんだ。膨大な桁数の計算を少しでも簡単にしようと約20年の歳月をかけて作り上げたんだ。ざっくりいうと対数は1000×100が3＋2になる世界なんだよ。公式の (3)(4)でもみたように 対数はかけ算を足し算に、割り算を引き算に変える。この革命的な計算ツールによって天文学における計算が簡潔になり、その計算の成果が航海の安定に繋がったんだ。つまり人命が救われたと言ってもいい。

対数の導入の授業を徒然なるままに書いてみました。できる限り授業の口調を再現したつもりです。特に真新しいことは何一つしていません。

教科書を確実に理解させることを大切にする

当たり前なのですが、この年になってそんな基本姿勢の重要性を痛感しています。

最後に余談になりますが、傍用問題集で次の問題の解答が以下のようになっていました。

問題　次の式の値を求めよ。ただし，a，x は正の数とし，$a\fallingdotseq1$ とする。

(1)　$a^{\log_a x}$　　(2)　$3^{-2\log_3 4}$　　(3)　$36^{\log_6\sqrt{5}}$

すべて同じなので(1)のみにします。

解答　$y=a^{\log_a x}$ とおく。右辺は正の数であるから，a を底とする両辺の対数をとると

$$\log_a y=\log_a a^{\log_a x}$$

ここで　$\log_a a^{\log_a x}=(\log_a x)(\log_a a)=\log_a x$

よって　$\log_a y=\log_a x$　したがって　$y=x$　すなわち　$a^{\log_a x}=x$

この解答の後に別解で、定義を使った解答が記載されていました。与式を y とおいたのでは対数の定義って一体何だったんだろうと素朴に思ってしまうのですがいかがでしょうか。