別解を取り入れた指導
（３元１次連立方程式の回避を端緒に）

北海道小樽桜陽高等学校　若　林　理一郎

＜はじめに＞

先日、教科書を見ていると、３点を通る円の方程式を求める例題がありました。多くの場合、一般形 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ に３点を代入した３元１次連立方程式を利用しています。

ただ、今まで受け持ってきた生徒を見ていると、３元１次連立方程式を解くことについて、時間をかけた分だけの達成率が得られない気がしていました。多くの生徒にとって、３元１次方程式を解く機会は、この問題と３点を通る２次関数を求める問題と２つの場合しかないように思われます。将来、線形代数を学ぶのであれば、高校数学とつながる内容の１つとして是非とも触れておくべきでしょうが、今、指導している生徒たちが、学年の中でも一番の文系（実は、女子の多くが看護志望らしい）とも思えるクラスです。そこで、何とか「３元１次連立方程式を回避しよう」という考えからスタートしたのが本稿です。

1　円の方程式の話題

先の切欠となった問題は、次のとおりです。

東京書籍　数学Ⅱ　Ｐ７７

例題１）３点 $A(-7,\ 5),\ B(-3,\ 7),\ C(0,\ -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

解）求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

これが点 $A(-7,\ 5)$ を通るから、　$(-7)^2+5^2+(-7)l+5m+n=0$

すなわち　$\underline{-7l+5m+n+74=0}\cdots\cdots$①

同様に、点 $B,\ C$ を通るから、

$(-3)^2+7^2+(-3)l+7m+n=0,\quad 0^2+(-2)^2-2m+n=0$

すなわち $\underline{-3l+7m+n+58=0}\cdots\cdots$②,　$\underline{-2m+n+4=0}\cdots\cdots$③

①、②、③より　$\underline{l=6,\quad m=-4,\quad n=-12}$

よって、求める円の方程式は、$\underline{x^2+y^2+6x-4y-12=0}$

これを回避する方法として、次のように求めました。

別解１) 求める円の中心を $R(a,\ b)$ とする。

$A,\ B,\ C$ は円周上の点なので、R までの距離は全て半径に等しい。

$RA^2=RC^2$ より、$(a-(-7))^2+(b-5)^2=a^2+(b-(-2))^2$

すなわち、$\underline{a-b+5=0}\cdots\cdots$①

$RB^2=RC^2$ より、$(a-(-3))^2+(b-7)^2=a^2+(b-(-2))^2$

すなわち、$\underline{a-3b+9=0}\cdots\cdots$②

①、②より、$\underline{a=-3,\ b=2}$

従って、円の方程式は半径を r とするとき、$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$ と表せる。

これが $C(0,\ -2)$ を通るから、$(0+3)^2+(-2-2)^2=r^2$ すなわち、$\underline{r^2=25}$

よって、求める円の方程式は、$\underline{(x+3)^2+(y-2)=25}$

実際の授業（４０名）では２つの方法を紹介し、双方のメリット・デメリットと思われるものを説明した上で、自分の好きな方を選ばせて解かせました。そして、この後２回、このパターンを含む小テスト（５分間）を実施しました。

表 1: 利用した解法と正答状況

	３元１次	別解	不明・解答なし
１回目	１８名	１７名	４名
２回目	１３（部分点２）	１９（正解者４、部分点２）	5

１回目は、残念ながら連立方程式は作っても、値を求めるところまでには至らなかったようです。２回目は、若干、別解を利用する生徒が多くなり、正解者やある程度の値までを求められる生徒が増えてきました。

この後、他の解法はないかとインターネットで検索していると、中村先生（札幌旭丘）のレポートに、「円の中心は弦の垂直二等分線の交点」ことを利用して、３点を通る円の方程式を求めることで、グラフそのものの性質が見えてくるという趣旨のことが書かれていました。

別解２) 円の中心は、３本の弦 AB, BC, CA の垂直２等分線の交点である。
AB の中点は $(-5,\ 6)$、AB の傾きは、-2 であるので、
弦 AB の垂直二等分線を表す直線の式は、$y-6=-2(x-(-5))$
すなわち、$y=-2x-4\cdots\cdots$①
BC の中点は $(-3/2,\ 5/2)$、AB の傾きは、$1/3$ であるので、
弦 BC の垂直二等分線を表す直線の式は、$y-5/2=1/3(x-(-3/2))$
すなわち、$y=1/3x+3\cdots\cdots$②
①、②より、交点は $(-3,\ 2)$ で、これが円の中心の座標となる。(以下、別解①と同様)

2　２次関数の場合

３元１次連立方程式が登場するもう１つの代表的な問題が、３点を通る２次関数の式を求める問題です。

東京書籍　数学Ｉ　Ｐ７１
例題４）３点 $A(1,\ 6),\ B(-2,\ -9),\ C(4,\ 3)$ を通るような２次関数を求めよ。
解）求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。この関数のグラフが
点 $A(1,\ 6)$ を通るから、$4a-2b+c=-9\cdots\cdots$①
点 $B(-2,\ -9)$ を通るから、$a+b+c=6\cdots\cdots$②
点 $C(4,\ 3)$ を通るから、$16a+4b+c=3\cdots\cdots$③
①，②，③を同時に満たす a,b,c を求めればよい。まず、
②−①より、c を消去して　$3a-3b=-15$　両辺を３で割ると、　$a-b=-5\cdots\cdots$④
③−②より、c を消去して　$12a+6b=12$　両辺を６で割ると、　$2a+b=2\cdots\cdots$⑤
次に、④、⑤を a,b について解くと、　$a=-1, b=4$
これらを①に代入して c を求めると、　$c=3$
ゆえに、求める２次関数は　$y=-x^2+4x+3$

この問題の別解について調べてみると、次のような考え方がありました。

①中村先生（札幌旭丘）「放物線の切片形の小手技」
⇒ ２次関数の切片形 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と和関数の性質を利用して求める。

②掃き出し法・ガウス・ジョルダンの消去法
⇒行列の知識がなくても、係数の形式的操作で答えを導ける。

③ $Lagrange$ の補間多項式
⇒ ２次の補間多項式

$$y = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

に、３点を代入することで式を得られる。

3　３元１次連立方程式に感じる違和感

円の問題で３元１次連立方程式を避けることは、「一般形」を避け「標準形」を使うことにつながります。

生徒に指導する中で、

「標準形」: グラフを描くために便利な形　　「一般形」:「標準形」を展開・整理した形

と、指導しています。ひょっとすると、幾何学的なアプローチで迫っている流れの中で、代数的計算に重きが置かれることに違和感を感じたのかもしれません。その意味でいけば、２次関数の場合にしても、中村先生のアプローチは視覚的にイメージをしやすいので式を立てやすく、それ以外は、形式的な計算で求められるものの、幾何学的にイメージして式を立てるには、あまりにも漠然としています。ただ、授業した生徒の状況を見ていると、３元１次連立方程式を利用して解いている生徒も半分近くいます。このことから、今更ながらですが、時間がある限りいろいろなアプローチを提示することで、多様なものの見方・考え方にふれ、自分にあった方法を取捨選択させる適応力（情報活用能力ともいえるか？）をつけることができるのではないかと感じました。

4　円外の１点から接線の方程式を求める問題

何気なく「モノグラフ」の公式集を見ていたときに見つけたのですが、ちょうど今回の３点を通る円の方程式の問題の少し後で、今回の話題のつながる問題が出てきたので紹介します。

円の直線に関する問題で、円と直線の交点を求める過程から出てくる２次方程式より「判別式」を利用する方法、直前の「点と直線の位置関係」から「点と直線の距離公式」を利用する方法で説明されることが多いと思います。今、本校で使っている教科書では、前者を重点化し、後者も紹介する記述をとっています。ただ、判別式は２次関数以来のしばらくぶりに出てくる内容であり、私は自然な流れを考えて後者を重点的に指導しています。

そんなときに、次のような問題に取り組むことになりました。

東京書籍「数学Ⅱ」Ｐ８３
例題４) 点 $(15,\ 5)$ を通り、$x^2+y^2=50$ に接する直線の方程式を求めよ。
(教科書の解答) 接点を $(x_1,\ y_1)$ とすれば、接線の方程式は、$\underline{x_1x+y_1y=50}\cdots\cdots$①
これが点 $(15,\ 5)$ を通るから、$15x_1+5y_1=50$、これより、$\underline{y_1=-3x_1+10}\cdots\cdots$②
また、$(x_1,\ y_1)$ は円周上の点であるから、$\underline{x_1^2+y_1^2=50}\cdots\cdots$③
②を③に代入して整理すると、$x_1^2-6x_1+5=0\quad (x_1-1)(x_1-5)=0$
これを解くと、$x_1=1,\ 5$、②より、接点 $\underline{(x_1,\ y_1)}$ は、$\underline{(1,\ 7)}$ または $\underline{(5,\ -5)}$ である。
したがって、求める接線は２本あり、①よりその方程式は、$\underline{x+7y=50,\ \ x-y=10}$

この授業の直前に見ていた本を読んでいると、たまたま次のような解法があったので、例題にあわせて１度自分で解いてみました。

（モノグラフの解法）接点 $(15,\ 5)$ を通る直線は、
$y-5=m(x-15)\qquad \therefore\ \underline{mx-y+(-15m+15)=0}$
$x^2+y^2=50$ の中心 O からこの直線に下ろした垂線の長さが半径 $\sqrt{50}$ に等しいから、

$$\underline{\frac{|-15m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{50}}$$

両辺を２乗して整理すると　$(7m+1)(m-1)=0\quad \therefore\ m=1,-\dfrac{1}{7}$（以下、省略）

こちらの方が、それ以前の流れを考えれば、①傾きと通る１点で直線を導く②点と直線の距離公式　の２つを学んでいることから、自然であると思いました。学校祭前最後の授業で紹介することになったことと時間的制約で両方の説明と小テストまではできなかったので、授業自体の評価はできませんでした。

＜おわりに＞
今回の一連の授業の中で改めて大切だと感じたのは、それまでの流れを大事にしながら様々な見方・考え方を示す、最低、教師はできるだけ多くのアプローチを背負って授業に臨むことです。今まで、どうしても雑務に追われ、教材研究を深くする時間のない中で授業することが大半であった私ですが、改めて教材研究の大切さ、特に、教師自身が多面的なものの見方・考え方を持つことの重要性を感じました。

参考文献

[1] 飯高茂／松本幸夫 編「数学Ｉ」「数学Ⅱ」東京書籍

[2] 中村文則「放物線の切片形の小手技」（「数学のいずみ」ＨＰより）

[3] 横田壽「数値解析入門Ｉ」開成出版

[4] ウィキペディア「ガウスの消去法」$http://ja.wikipedia.org/$

[5] 「私的数学塾」$http://www004.upp.so-net.ne.jp/s\_honma/$

[6] 矢野健太郎監修「モノグラフ　－公式集－」科学振興新社